

目次

第1章	絶対座標系を用いた強制振動	1
第2章	概要	3
2.1	振動装置	3
2.2	測定装置	4
2.3	オシロスコープ	5
第3章	オシロスコープの操作方法	7
3.1	Cursors モードによる測定 (手動)	7
3.1.1	設定方法	7
3.1.2	測定方法	8
3.2	Measure モードによる測定 (自動解析)	8
3.2.1	設定方法	9
3.2.2	測定方法	11
第4章	実験	13
4.1	実験準備	13
4.2	実験	13
付録A	自由振動	15
付録B	相対座標系を用いた強制振動	17
付録C	差動変圧器	19
付録D	最小二乗法	21

第1章 絶対座標系を用いた強制振動

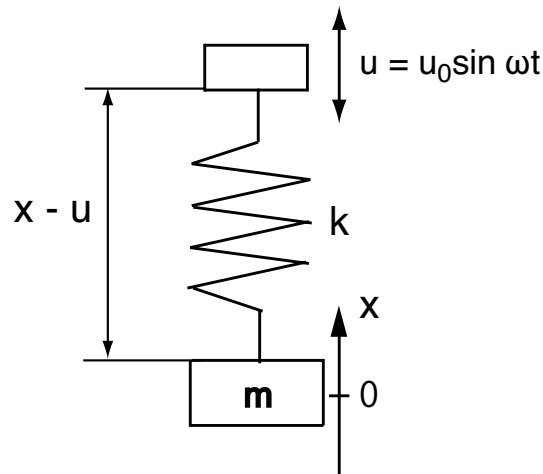


Fig. 1.1: 強制振動

この振動測定器は質点の変位を絶対変位で測定する．なので，絶対変位の視点から共振について考える．図 1.1 に示すようにばねの固定端 u が振動数 ω (rad/sec) の周期で振動をしているとすると，変位 x と固定端の変位 u からばねによる力 $k(x-u)$ が決まる．以上より，運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k(x-u) = 0 \quad (1.1)$$

変形していくと

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx - ku = 0 \quad (1.2)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = ku \quad (1.3)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}u \quad (1.4)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p^2 x = p^2 u \quad (1.5)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p^2 x = p^2 u_0 \sin \omega t \quad (1.6)$$

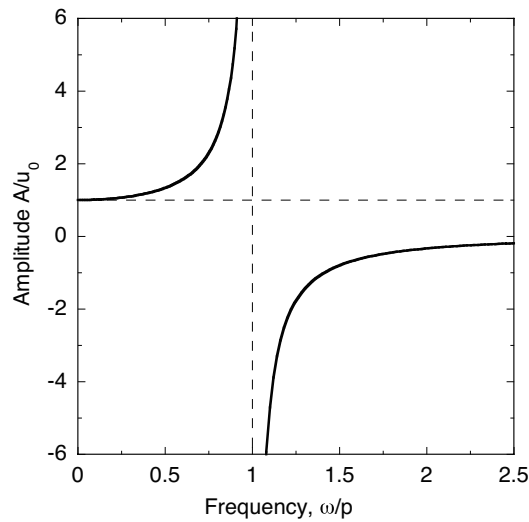


Fig. 1.2: 絶対変位

自由振動による振動は減衰して消え，強制変位 $u_0 \sin \omega t$ による振動だけが残るので

$$x = A \sin \omega t \quad (1.7)$$

が解として現れる．これを式(1.6)に代入すると

$$-A\omega^2 \sin \omega t + p^2 A \sin \omega t = p^2 u_0 \sin \omega t \quad (1.8)$$

$$A(p^2 - \omega^2) = p^2 u_0 \quad (1.9)$$

$$A = \frac{p^2 u_0}{p^2 - \omega^2} \quad (1.10)$$

$$\frac{A}{u_0} = \frac{1}{1 - \omega^2/p^2} \quad (1.11)$$

が得られる．式(1.11)の関係から理論的に導いた結果を図1.2に示す．

グラフからわかるように振動数 ω が変化して，強制振動の振動数と固有振動数が一致すると強制変位が拡大され，質点は無限大の振幅で振動する．この現象を共振という．

第2章 概要

2.1 振動装置

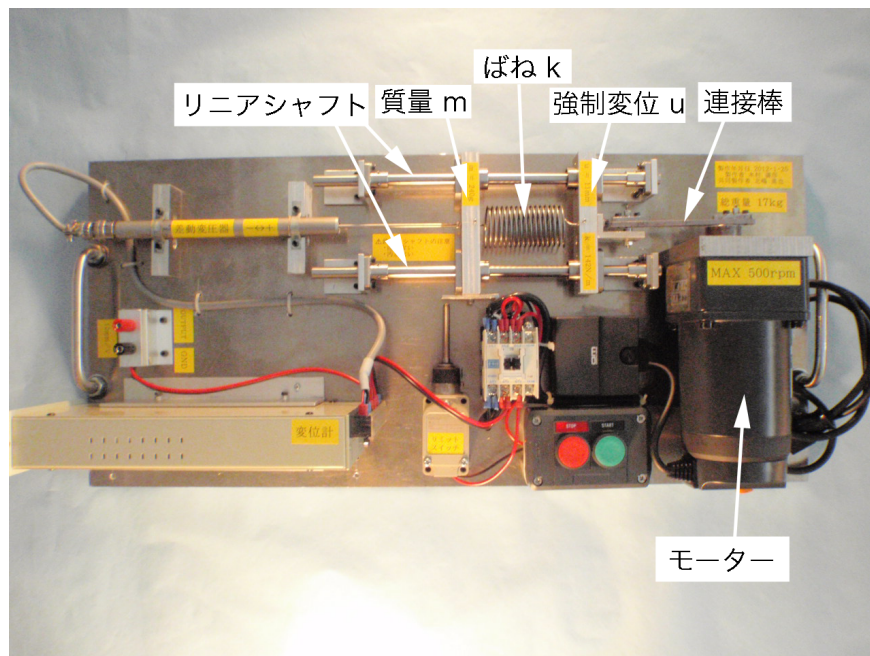


Fig. 2.1: 振動装置

図 2.1 に振動装置の概略図を示す。強制変位の振幅 u_0 は ± 11 mm、質量の振幅 A は ± 50 mm 以内、ばね定数 k は 142 N/m、質量 m は 240 g になっている。振動装置はモーターが回転し、接続棒によって強制変位が変化する。質量と強制変位はリニアシャフト上を動くようになっており、リニアシャフトの直線性¹と2本のリニアシャフトの平行度が動きに影響する。

図 2.2 にモーターの側面を示す。モーターの最大回転 r は $0 \sim 500$ rpm になっている。側面にはスイッチと回転数を変化させるつまみが付いている。つまみを右に回すと回転数が上がる。

¹リニアシャフトの変形や傷、ゴミの付着による汚れなどにより質量と強制変位の動きが悪くなる。



Fig. 2.2: モーター

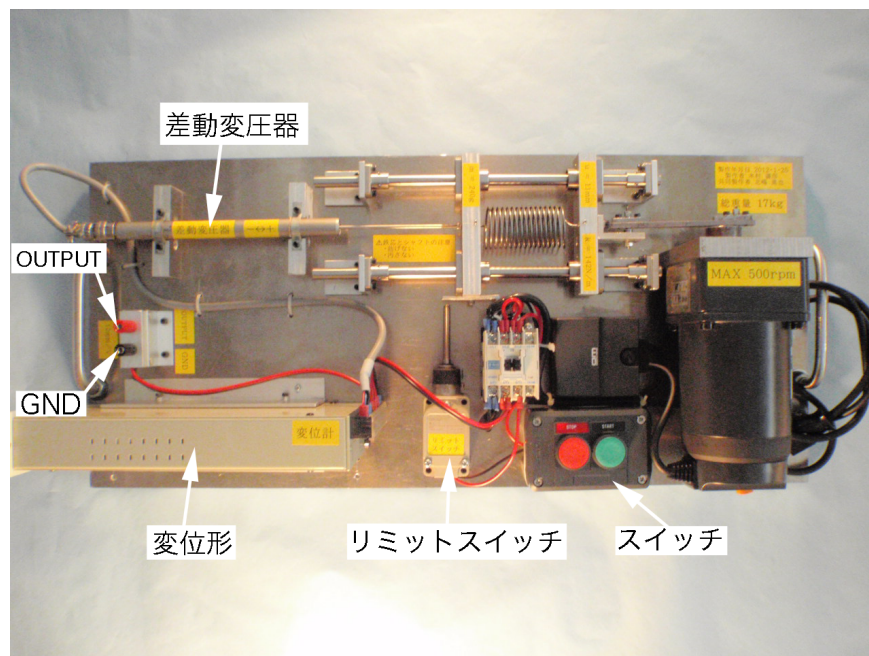


Fig. 2.3: 測定装置

2.2 測定装置

図 2.3 に測定装置の概略図を示す。差動変圧器の鉄心が質量に取り付けてあり、質量と連動している。鉄心が動ごくことにより、変位を電圧に変換し、変位形から電圧を出力する²。今回、質量の振幅は ± 50 mm 以内に設定しており、振幅が ± 50 mm に近づくとリミットスイッチが作動し、電源が切れる。電圧と変位の関係は 12 mm/V である。

²リニアシャフトと同様に変形や汚れなどにより鉄心の動きが悪くなり正確な変位を測定ができない。

2.3 オシロスコープ



1. 入力チャンネル
2. 電源ボタン
3. Cursors
4. Measure
5. Intensity/Adjust ノブ
6. メニュー ON/OFF
メニューオプションボタン
7. Volt/div ノブ (CH1-2)
8. Vertical Position ノブ
(CH1-2)
9. Time/div ノブ
10. Horizontal Position ノブ
11. Run/Stop

Fig. 2.4: 正面

図2.4に正面を示す。以下に述べる説明中の番号は図面の番号と対応している。

1. プローブ (図2.5) を接続する。今回は二つのチャンネルがある。
2. オシロスコープの起動，終了を行う。
3. 二本のカーソルを用いて電圧，時間を測定する。
4. 測定する項目を設定し，自動的に計算を行い，測定する。
5. カーソルの移動，測定する項目の選択，決定の際に用いる。
6. 測定する項目の設定に用いる。
7. 波形を垂直 (電圧) 方向に拡大，縮小する。今回はCH1，CH2にそれぞれノブがある。
8. 波形を垂直 (電圧) 方向に移動する。今回はCH1，CH2にそれぞれノブがある。
9. 波形を水平 (時間) 方向に拡大，縮小する。
10. 波形を水平 (時間) 方向に移動する。
11. ディスプレイに波形を一時的に保存する。再度押すと解除される。

図2.6に側面を示す。電源入力コネクタがあり，ACケーブルを接続する。



Fig. 2.5: プローブ



Fig. 2.6: 側面

第3章 オシロスコープの操作方法

3.1 Cursors モードによる測定 (手動)

Cursors¹はCurAとCurBの2つのカーソルを用いて、2つのカーソルを間の電圧と時間を測定する。電圧を測定することで変位、振幅を求められ、時間を測定することで周波数、振動数が求まる。Cursorsで測定する時のディスプレイの表示とメニューオプションボタン(2.4-6)を図3.1に示す。縦軸がVoltage(電圧)、横軸がTime(時間)になっている。各カーソルの値とその差がディスプレイの左上に表示され、それらを用いて測定することができる。オプションボタンはディスプレイに表示されるメニューと対応しており、これはCursorsモードだけではなく、すべてのモードで対応している。

3.1.1 設定方法

まずメニューオプションボタンなどによりディスプレイの設定を以下の操作で行う。



Fig. 3.1: Cursors

¹振動数の測定にはCursorsモードを推奨する。ただし、波形がきれいな場合はMeasureモードも可能である。

1. Cursors(2.4 - 3) を押す。
2. Mode オプションボタンは測定方法を決定する。測定方法は三つあり、今回は手動でカーソルを動かす Manual 測定とする。Mode オプションボタンを何回か押し (Manual→Track→Auto)，Manual にする。
3. Type オプションボタンは測定する項目を決定する。Type オプションボタンを何回か押し (Voltage→Time)，質量の変位を求めるには Voltage (電圧) にし、波の周波数を求めるには Time (時間) にする。Voltage (電圧) にすると、水平方向に CurA と CurB があらわれ、Time (時間) にすると、垂直方向に CurA と CurB があらわれる。
4. Source オプションボタンは測定する波形のCHを決定する。CH1の波形を測定するので、Source オプションボタンを何回か押し、(CH1→CH2→MATH →REFA→REFB)，CH1 にする。

3.1.2 測定方法

次に Cursors での測定方法は以下の操作を行う。

1. Volt/div ノブ (2.4 - 7)，Vertical Position ノブ (2.4 - 8) を用いて縦軸を調整し、Time/div ノブ (2.4 - 9)，Horizontal Position ノブ (2.4 - 10)，を用いて横軸を調整してディスプレイに波形を出力する²。
2. Run/Stop (2.4 - 11) を押し、測定したい波形をディスプレイに一時的に保存する。
3. CurA または CurB オプションボタンを選択し、動かすカーソルを決める。
4. Intensity/Adjust ノブ (2.4 - 5) を回し、CurA または CurB を測定したい位置に動かし、CurA，CurB で波形をはさむ。
5. 電圧差 ΔV と時間 ΔT を測定する。測定した ΔT を用いて周波数 f [Hz] を算出する。

3.2 Measure モードによる測定 (自動解析)

Measure ³は図 3.2 のように測定項目を設定し、自動的に算出し、測定する。そこで、測定項目を設定しなければならない。今回の強制振動実験に必要な測定項目は以下の四つである。

²電圧をディスプレイに表示する時、縦軸と横軸のスケールが適正でないと波形は表示されない。Volt/div ノブと Time/div ノブを使い、スケールを拡大、縮小し、適切なスケールに合わせる。

³電圧の測定には Measure モードを推奨する。ただし、波形の数が少ない場合は Cursors モードを推奨する。

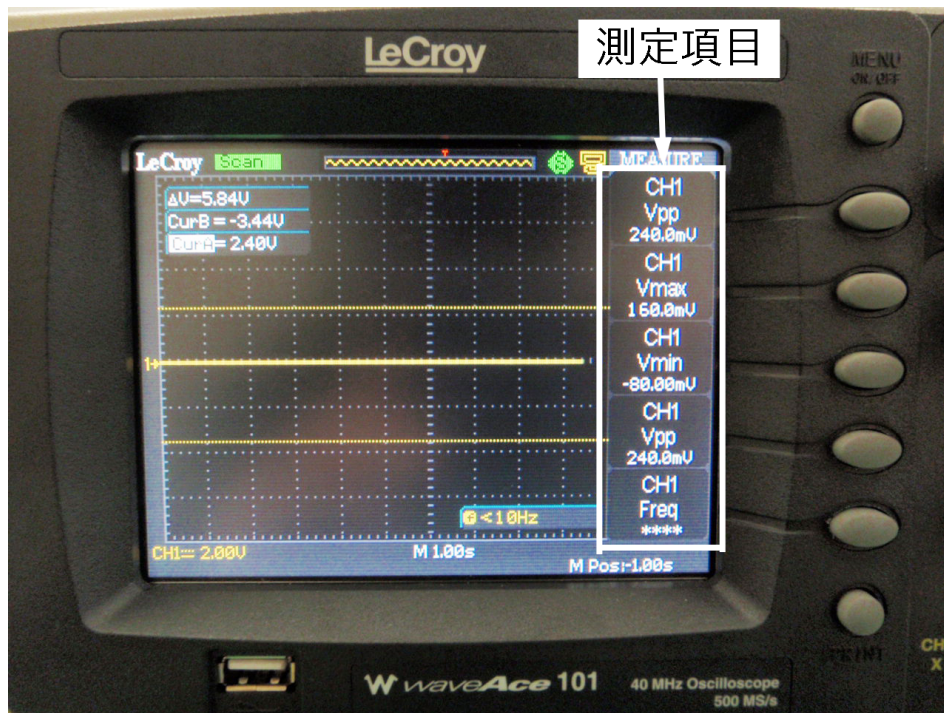


Fig. 3.2: Measure

- V_{pp} -電圧の波形の最大最小差を表示している。変位、振幅を算出するために用いる。
- V_{max} -電圧の波形の最も高い電圧を表示している。 V_{pp} の確認に用いる。
- V_{min} -電圧の波形の最も低い電圧を表示している。 V_{pp} の確認に用いる。
- Freq -電圧の波形の周波数を表示している。振動数を算出するのに用いる。

3.2.1 設定方法

測定項目の設定方法は以下の操作で行う。

1. Measure (2.4 - 4) を押す。
2. 設定したい測定項目のオプションボタンを押す。
3. 図 3.3 の選択画面が表示され、 V_{pp} 、 V_{max} 、 V_{min} に設定する場合、Voltage (電圧) オプションボタンを押す、Freq に設定する場合、Time (時間) オプションボタンを押す。
4. 図 3.4 の設定画面が表示され、Cursors と同様に CH1 の波形を測定するので、Source オプションボタンを何回か押し (CH1→CH2→MATH →REFA→REFB), CH1 にする。

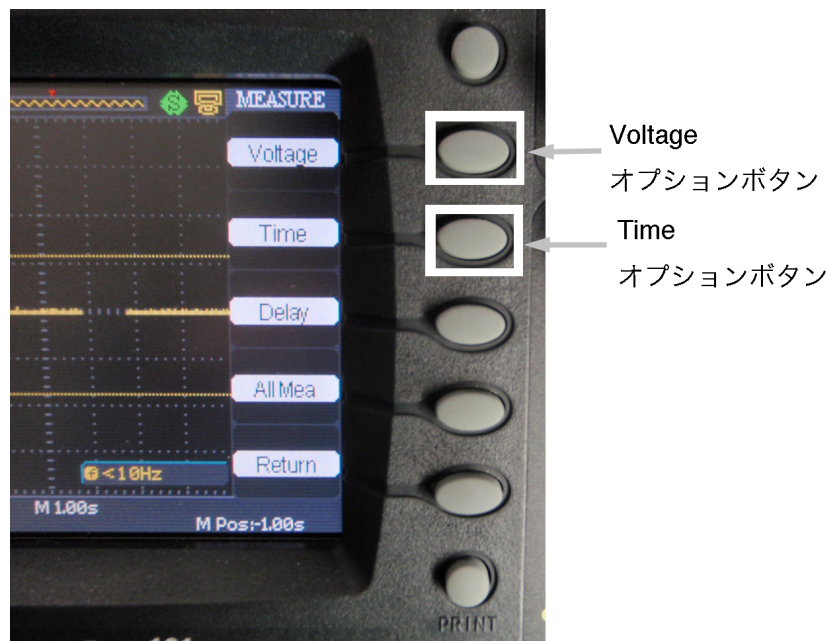


Fig. 3.3: 選択画面

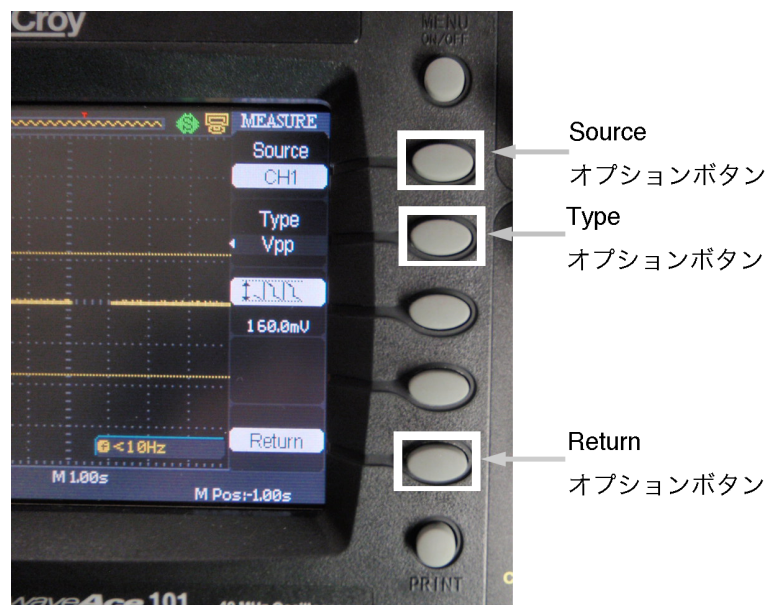


Fig. 3.4: 設定画面

5. Type オプションボタンを何回か押し，Voltage (電圧) オプションボタンを押した場合は V_{pp} , V_{max} , V_{min} にし，Time (時間) オプションボタンを押した場合は Freq にして，Intensity/Adjust ノブを押して決定する。
6. 測定項目を設定し終わったら，Return オプションボタンを押し，ディスプレイを図 3.2 の状態に戻す。

3.2.2 測定方法

次に Measure での測定方法は以下の操作を行う。

1. Cursors の時と同様に Volt/div ノブ, Vertical Position ノブを用いて縦軸を調整し, Time/div ノブ, Horizontal Position ノブ, を用いて横軸を調整してディスプレイに波形を出力する。
2. Run/Stop を押し, 測定したい波形をディスプレイに一時的に保存する。
3. 図 3.2 のように測定項目に測定した値が表示される。

第4章 実験

4.1 実験準備

以下に実験準備について述べる。

1. 振動測定器¹を安定した場所に設置する。
2. 入力チャンネルのCH1にプローブを接続し、GND(黒)とOUTPUT(赤)に接続する。GNDとOUTPUTを逆に接続しないように注意する。
3. オシロスコープの電源入力コネクタにACケーブルを接続する。
4. モーターのスイッチがOFFになっていることを確認し、振動測定装置の電源ケーブルを接続する。
5. 実験を行う前に以下のことを確認する。
周波数 f [Hz], 電圧 ΔV [V] とすると

- 固有振動数 p [rad/sec]
そのときの周期 T [sec]
- 変位 x [mm]
- 振幅 A [mm]
- 振幅比 A/u_0
- 振動数 ω [rad/sec]

4.2 実験

以下に実験について述べる。

1. オシロスコープの電源を入れる。CursorsかMeasureを選択し²、測定方法を決定したあと、メニューON/OFF、メニューオプションで測定項目の設定を行う。

¹本振動測定器は総重量 17 kg である。持ち運ぶ時は 1 人で無理に運ばず、2 人以上で運ぶとよい。

²波形をディスプレイに一時保存した後でも Cursors と Measure の切り替えは可能である。

2. 測定装置のスイッチの START ボタンを押して電源を入れる。
3. モーターのつまみが MIN になっていることと、質量と強制変位の可動を妨げるものがないことを確認した後、モーターのスイッチを ON にする。
4. モーターのつまみを回し、回転数を MIN から上げていき、オシロスコープに出力された波形から周波数 f [Hz]，電圧差 ΔV [V] を 20 点ほど、振幅比 3 倍程度まで測定し、 f [Hz] と ΔV [V] のグラフを作成する。
5. 振動数が共振点に近づき、振幅が大きくなるとリミットスイッチが作動し、振動測定装置の電源が落ちる³。リミットスイッチが起動しなかった場合、質量とシャフトホルダーが衝突する前にモーターのスイッチを OFF にする。
6. 次に上の測定をモーターの回転数を MAX から下げながら行い、同様にグラフにする。
7. 測定を終えたらモーターの電源を切り、つまみを回し、回転数を MIN にする。振動測定装置、オシロスコープの電源も切る⁴。
8. 測定した f [Hz] と ΔV [V] から振動数 ω [rad/sec] と振幅比 $|A|/u_0$ を算出し、グラフを作成する。
9. ω [rad/sec] と $|A|/u_0$ の実験データを見て、異常があるデータを削除していく。残ったデータを用いて最小二乗法を行い、固有振動数 p を求める。

³共振点に近づき、リミットスイッチが起動して波形が切れた場合、波形が切れたところからさかのぼって山から谷(半波長)ごとに Cursors モードを用いて電圧、周波数を測定していく。

⁴実験を長時間行くと差動変圧器の鉄心についているテフロンチューブが擦れて破損につながる。なので、長時間の可動は避け、できるだけ短時間で実験を行う。

付録A 自由振動

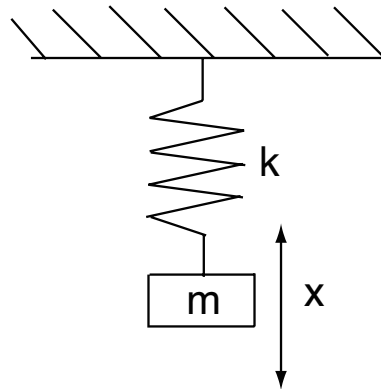


Fig. A.1: 自由振動

強制振動はばねにある周期で力を加えて強制的に振動させる。ここでは、ばねに力を加えず、ばねの復元力のみで振動する自由振動について考える。

図 A.1 のように質量 m にばね定数 k のばねが付いている。自由長から変位 x まで伸ばすと、フックの法則より復元力は kx となる。ゆえに、一自由度系において運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (\text{A.1})$$

これを変形すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (\text{A.2})$$

ここで

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.3})$$

とすると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2x \quad (\text{A.4})$$

が得られる。これを満たす解は、ばねの振動が単振動であることに着目すると $x = \sin pt$, $x = \cos pt$ が解として成立することがわかる。ゆえに、

$$x = A \sin pt \tag{A.5}$$

となる。この振動は、質量とばね定数により固有の振動数 $p = \sqrt{k/m}$ を持ち、この p を固有振動数という。

付録B 相対座標系を用いた強制振動

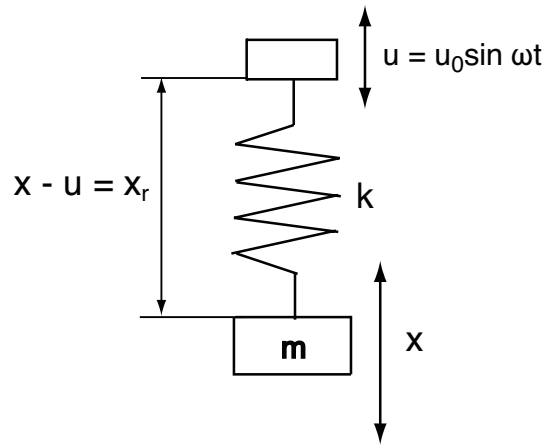


Fig. B.1: 相対座標系を用いた強制振動

第1章では絶対変位を用いた強制振動について考えた。今回は変位 x と固定端 u の変位の相対変位 x_r を用いた強制振動について考える。

図B.1に示すようにばねの固定端 u が振動数 ω (rad/sec) の周期で振動をしているとすると、変位 x と固定端 u の変位の相対変位 $x_r = x - u$ によりばねによる力が決まる。以上より、運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_r + u) + kx_r = 0 \quad (\text{B.1})$$

これを变形すると

$$m \frac{d^2 x_r}{dt^2} + m \frac{d^2 u}{dt^2} + kx_r = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + \frac{d^2 u}{dt^2} + p^2 x_r = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} - u_0 \omega_2 \sin \omega t + p^2 x_r = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + p^2 x_r = u_0 \omega_2 \sin \omega t \quad (\text{B.5})$$

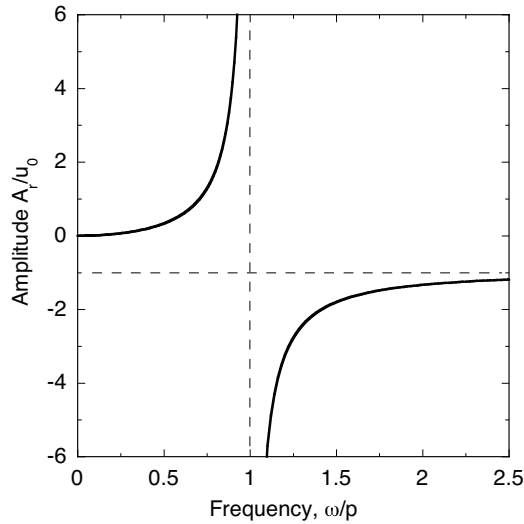


Fig. B.2: 相対変位.

となる。この振動では、自由振動による $A \sin pt$ の振動は減衰して消えていく。やがて振動で残るのは、固定端 u からエネルギーを供給されている強制変位 $u_0 \sin \omega t$ による振動だけである。したがって

$$x_r = A_r \sin \omega t \quad (\text{B.6})$$

が解として現れる。これを式 (B.5) に代入すると

$$-A_r \omega^2 \sin \omega t + p^2 A_r \sin \omega t = u_0 \omega^2 \sin \omega t \quad (\text{B.7})$$

$$A_r (p^2 - \omega^2) = u_0 \omega^2 \quad (\text{B.8})$$

$$A_r = \frac{u_0 \omega^2}{p^2 - \omega^2} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{A_r}{u_0} = \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2} \quad (\text{B.10})$$

が得られる。式 (B.10) の関係から理論的に導いた結果を図 B.2 に示す。

グラフからわかるように相対座標系を用いても絶対座標系と同様に共振が起こる。

付録C 差動変圧器

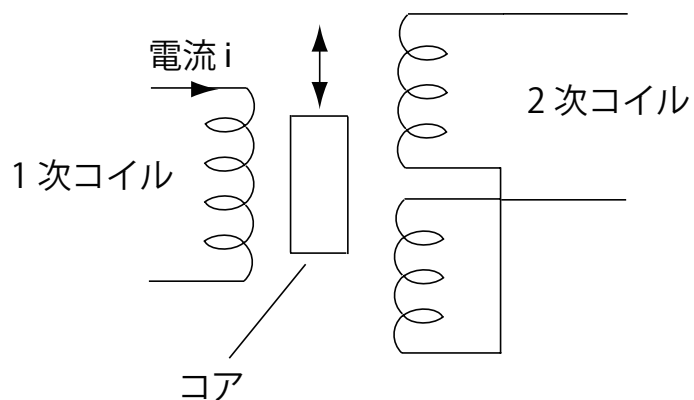


Fig. C.1: 原理

差動変圧器とは図C.1に示すような電氣的構造を持っており、1つの1次コイルと電氣的に対称な2つの2次コイル、および可動コアより構成されている。この1次コイルを交流励磁し、差接続した2次コイルの電圧を測定することにコイルとコアとの相対変位量を電氣的に検出するという方式のセンサである。

付録D 最小二乗法

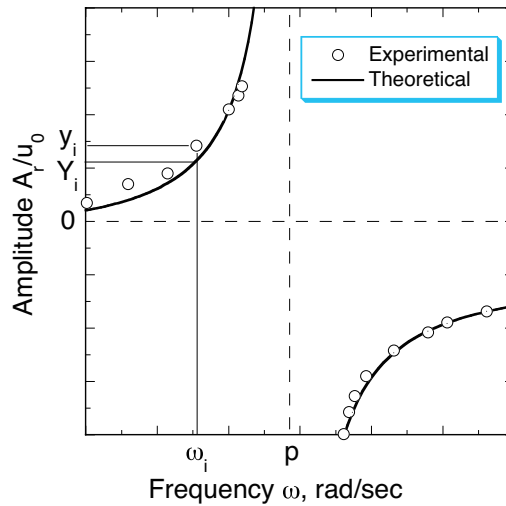


Fig. D.1: Relation between frequency and voltage.

図D.1のように強制振動の式を用いて関数近似を行い，近似されたグラフとデータとの誤差の総和が最小の p を求める．

適当な p を決めると， i 番目のデータ (x_i, y_i) と Y_i の誤差 $E_i(p)$ は

$$E_i(p) = (y_i - Y_i)^2 = \left\{ y_i - \left(\frac{\omega_i^2 / p^2}{1 - \omega_i^2 / p^2} \right) \right\}^2 \quad (\text{D.1})$$

となる．すべてのデータの総和をとると誤差 $E_r(p)$ は

$$E_r(p) = \sum_{i=1}^n E_i(p) \quad (\text{D.2})$$

$$= \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 \quad (\text{D.3})$$

p を変化させ，振動数 p と誤差 $E_r(p)$ のグラフを作成する．振動数 p と誤差 $E_r(p)$ のグラフを放物近似を行う．そこで， $E_r(p)$ が最小になる p が真の p である．