技術教育研究⊠

（工学基礎としての解析学・力学）

鈴木　賢治

平成 16 年 8 月 30 日

[1]

[1] This book is made by LaTeX2ε.

はじめに

花瓶に飾られたチューリップは，新潟の春を謳う花の一つです．チューリップのあざやかさに確かに元気づけられます．しかし，手軽に楽しめる花瓶の花は，やがてしおれてしまい，二度と芽を吹くことはありません．これは，水や養分を力強く吸い上げることのできない根を持たない切り花のかなしい運命です．

学問の基礎は人類の歴史から生まれ，育ってきました．あらゆる個別の科学も基礎学問と密接に関連し，そこから養分と水分を得て，みごとに花を咲かせています．その意味で，基礎学問はあらゆる科学の根であり，幹といえます．応用科学，先端技術も，ここからその生命の源を得ています．私たちも悲しい切り花のような知識でなく，生きた知識としての知力を持たなければなりません．そのためには，長い人類の歴史に根を持った基礎学問の上に技術を学ぶことが大切です．

技術は，生産に関する科学です．ゆえに，自然の認識を追求する自然科学と技術学の目的は大きく異なります．しかし，技術の成り立つ背景には，必ず科学的根拠があることを忘れてはいけません．その一方で，技術の進歩が自然科学の発展も刺激しています．

生産に関する科学としての技術の果たす役割は大きいといえます．なぜならば，生産は社会の基礎であり，教育，医療，福祉，文化なども，この優れた生産力の上に成り立っています．生産なしに一日も社会はなり得ません．技術を学ぶことを軽視する現代の風潮は，日本社会のゆがみのように思えます．花の美しさの根元にある豊かな大地と同じように，生産の科学を学ぶことを大切にしたいものです．

技術教育のためには，技術の基礎としての解析と力学を断片的知識でなく，その学問の根元から改めて学ぶことが大切です．また，技術教育を教えるためには，技術という学問がどのような体系を持ち，どのように形成されたのかを十分に学習することが，まず入り口になります．

ステップ 1 技術学の基礎（数学，物理，化学，生物学）の学習

ステップ 2 生産に関する学問としての工学および農学の基礎学習

ステップ 3 以上の基礎より得た学問の体系をもとに技術の歴史・発展とその教育方法の学習

本講義はステップ 1 の基礎解析と力学に相当します．機械 1，2 で機械工学（材料力学，流体力学）を工学基礎として学びます．機械 3 でで技術と生産の歴史，技術教育史，技術論および技術教育などを学びたいと思います．

目 次

第1章　数の歴史

1.1　数の発見

数学は，数の学問であり，数は量を表す記号です．数学の始まりは，数の認識からです．人間は，目が見え，音が聞こえ，感触を味わう，感覚が備わっています．声を出すことを知り，ことばを使うようになります．そして，数えることもできるようになります．数を知ることにより，量を正確に判断することができます．

では，人類はいつ頃から数というものを認識するようになったのでしょう．ベストニッツ（チェコスロバキア）で，55 本の刻み目がついた狼の骨が発見されています．これらの刻み

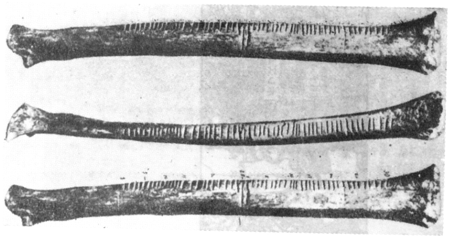


図 1.1: 狼の骨に刻まれた数字

目のはじめは，5 本ずつまとめられており，かなりの数を数えられたことが想像できます．旧石器時代といえば，紀元前 2 万 5 千年前ですから，道具を持ち，狩猟生活をしている人類には，数えることがりっぱに形成されていました．

1.2　自然数の発達

狩猟生活で利用する数の大きさに比較して，農耕で利用する数は大きくなります．1 年の周期で季節が変化するので，日数も数えなければなりません．収穫物の量も数えなければなりません．

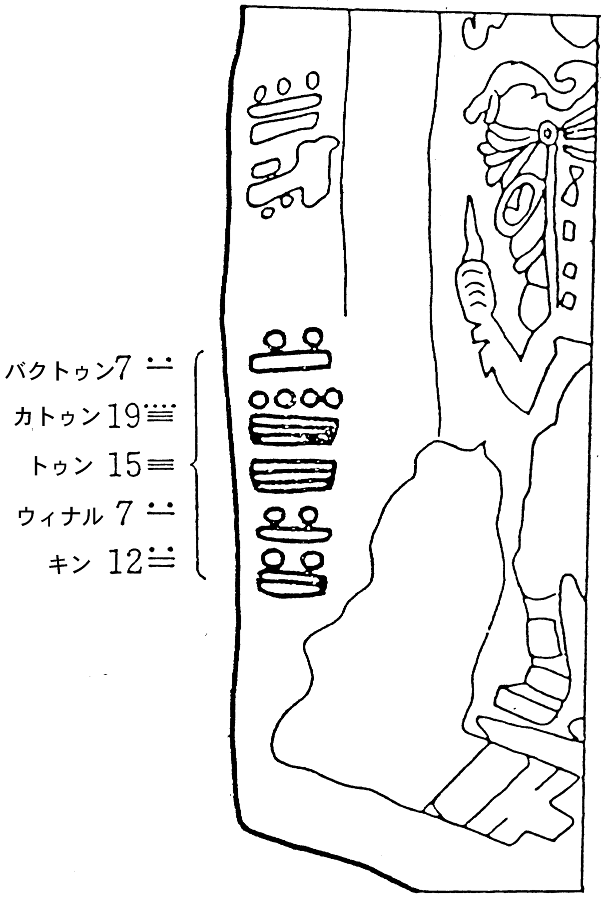


図 1.2: マヤの石碑に刻まれた日数

マヤ[1]のある石碑には，7 バクトゥン， 19 カトゥン，15 トゥン，7 ウィナル，12 キン，という数字が刻まれています．キンは日，ウィナルは月，トゥンは年に相当します．

$$
\begin{aligned}
1\,\text{ウィナル (月)} &= 20\,\text{キン (日)} \\
1\,\text{トゥン (年)} &= 18\,\text{ウィナル (月)} \\
1\,\text{カトゥン} &= 20\,\text{トゥン} \\
1\,\text{バクトゥン} &= 20\,\text{カトゥン}
\end{aligned}
$$

1 年は 18 月，360 日になっています．位取りは，20 進法が基本になっているようです．10

[1]中部アメリカのユカタン半島からメキシコ南部・グアテマラに分布する民族．A.C.300 年から 800 年にかけて巨大な都市が次々に建設され，独特の暦法に基づく年代を記録した石柱，数学，形象文字をもつ高度な文明を築いた．900 年以後急速に衰退し，都市は放棄された．16 世紀にスペインが侵略し，完全に衰退した．

進法に直すと，

$$
\begin{aligned}
& [\{(7 \times 20 + 19) \times 20 + 15\} \times 18 + 7] \times 20 + 12 \\
= \;& 1150352(\text{日})
\end{aligned}
$$

となります．これは，何らかの基準日より 1150352 日ということになりますが，3151 年以上の年を数えています．私たちの西暦を遙かに越える歴史を刻んでいることになります．

中国の殷[2]の時代は三万まで数えられたといわれます.「孫子算経」（4~5 世紀）には，一，十，百，千，万，億，兆，京（けい），垓（がい），　（し），壌（じよう），溝（こう），澗（かん），正（せい），載（さい）という数え方がのっています．銭が載を越すと，それ以上は地上から溢れ，宇宙空間も埋め尽くすのであり得ないことになっているので，載よりも大きい位は入らないことになっています．

【演習 1】

自然数について学習しましたが，自然数以外の数について調べてみましょう．整数，実数，有理数，無理数，虚数などは，どのような数字で，どのような歴史の経過で生まれてきたのでしょうか．

新しい数の導入により，どんなことが扱えるようになったのか，その長所が明確に説明できると，教えるときもよく理解してもらえます．

---

[2]B. C. 1520~ B. C. 1030 年，中国の実在する最古の王朝，黄河下流域を中心に栄えた．優れた青銅器文化が栄えた．

第2章　積分の概念

2.1　面積の測定

数学が苦手な人にとっては，微分をやった後に習う積分に対するイメージは，どうしても難しいことに思われがちです．しかも，小・中学校で習う数学のことばにはありません．しかし，積分の概念は古くからあり，私たちの日常にもたくさん含まれ，理解しやすい概念です．

積分の基本概念は，細かく分けてたすことです.「塵も積もれば山となる」と同じことで，山とえども細かくみれば岩石や土などの合わせたものです．私たちの人生も日々の生活の総和でしかありません．

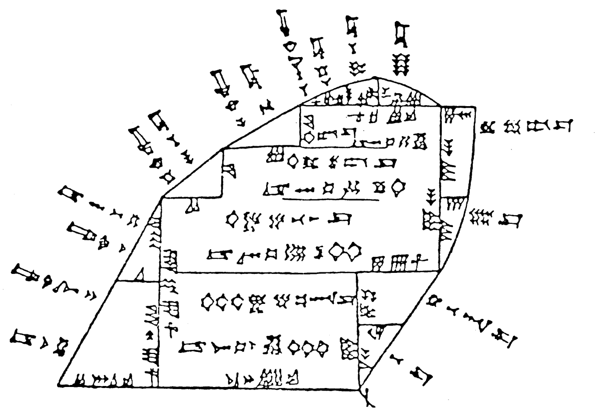


図 2.1: バビロニアの粘土板に描かれた測量図

さて，細かく分けて足すことの例を面積の測量にみてみましょう．図 2.1 は，バビロニアの粘土板です．図のように長方形と 3 角形に分けて一つひとつの面積を計算した後に，合計を求めて全体の面積を計算しています．この考えたは，まさしく積分の概念と同じものです．バビロニア時代[1]にすでに人類は明確な積分の考えをもち，仕事に利用しています．私たち自身も，このような考えは違和感なく理解して，生活の中でよく利用しています．

[1]Babylonia, B.C. 2000 年頃から B.C.1700 年頃．メソポタミアの古代都市バビロンを中心に栄えた．

2.2　面積の概念

面積を考え扱うことは，どのようにして生まれたのでしょう．面積の概念は，農業により生じてきたと考えられます．

- エーカー（英）

  9世紀から使われはじめ，2頭の雄牛が一日間に鋤を引張って耕す広さ．

- モルゲン（独）

  2頭の牛が午前中に耕す広さ．

- 1代（日）

  1束の稲がとれる田圃の広さ．1束は3尺の縄で縛れる稲束．

上記のように，広さを表現するのに，労働量や収穫量が使われていました．このことは，人間の概念の発達には人間の経験・活動が大きく関わっていることを示しています．単なる思いつきではなく，行動という事実から出発しているわけです．農作業の負担や収穫から広さを考えることが，生活をさえる点で合理的であったのではないでしょうか．

やがて農業生産力の向上するにしたがい，余剰生産物が増大します．その結果，余剰生産物を所有する階級が誕生します．階級の誕生は，すなわち国家の発生といえます．中央集権国家の支配階級は農作業をしないで，その生産物を収奪することを考えます．

大宝律令[2]を例に面積の定義の変化をみてみましょう．

- 大宝律令以前

  面積は収穫量で定義．租は100代当たりに3束（3%）．

- 大宝律令以後

  租は1町[3]当たりにつき22束．

このように，大宝律令以前は収穫に対して租が決められていました．冷害などにより凶作の年の国家の収入も減ります．面積を長さにより規定する方法を導入することにより，作柄によらず一定の国家財政の収入が得られます．数学により面積を定義することで，財政基盤と地方支配を強めたのが，大宝律令の大きな特徴です．

[2]701年，文武天皇の時に制定．律6巻，令11巻からなる．

[3]平城京・平安京の頃は400尺平方を1町とした．

余談になりますが，消費税 3%というのは，近年の日本のことでなく，太古の昔から税は 3%だったことも不思議なものです．

2.3　面積の計算

2.3.1　三平方の定理

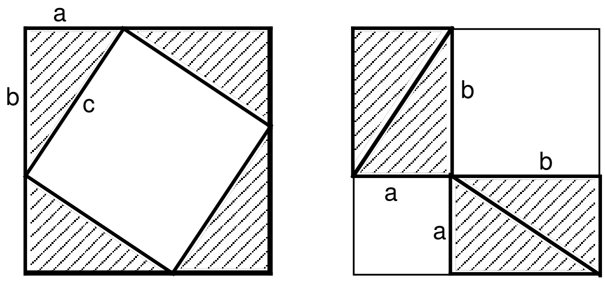


図 2.2: 三平方の定理の証明

面積の計算の中で，もっとも基本になるのは三角形です．すべての形は，三角形の合わさったものと考えることもできます．三角形は，いろいろな解析においてよく利用される大切な形状です．三角形の代表的な公式として，まず三平方の定理をみてみましょう．

図 2.2 は，三平方の定理の証明のための図です．三平方の定理は，直角三角形についての定理で，以下の式で表されます．

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{2.3.1}$$

この定理の証明には，いろいろな方法があると思いますが，図を 2.2 を利用した方法を考えてください．[4]

バビロニアの粘土板の資料から優れた代数学や幾何学の成果が発見されています．三平方の定理（ピタゴラスの定理）を利用すると，どうしても平方根を求めることが必要になります．$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ などの計算も優れた近似値を使用していました．たとえば，図 2.3 に示すよう

[4] **ヒント**：各正方形の面積は同じです．白い面積を比較でわかります．

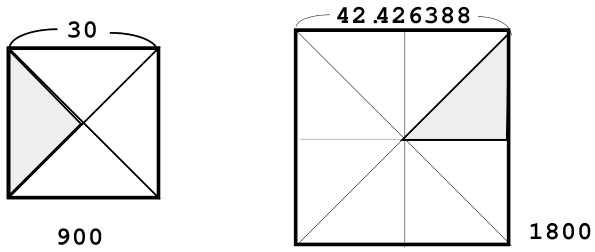


図 2.3: $\sqrt{1800}$ も計算していたバビロニアの数学

に一辺が 30 の正方形をつくり，4 つの三角形に分け，その三角形 8 個を合わせて右のような正方形を作ったときの一辺の長さを 42.426388 と求めています．電卓をたたけば，

$$\sqrt{1800} = 30\sqrt{2} = 42.426406 \tag{2.3.2}$$

ですから，バビロニア時代の数学は，かなりの精度で近似値を得ていたことがわかります．

2.3.2　ヘロンの公式

三角形の面積で，ヘロンの公式を学んでみましょう．ヘロンの公式は，三角形の三辺の長さ a, b, c を測定して，面積 S を求める方法で，

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{2.3.3}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \tag{2.3.4}$$

と表します．

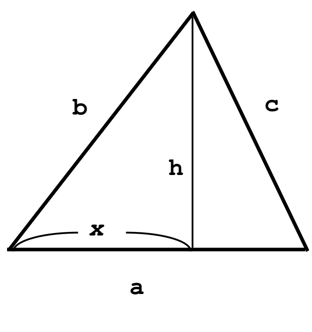


図 2.4: ヘロンの公式

この証明は，図 2.4 のように二つの直角三角形に分け，三平方の定理を適用すると

$$x^2 + h^2 = b^2 \tag{2.3.5}$$

$$(a-x)^2+h^2=c^2 \tag{2.3.6}$$

式 (2.3.5) を以下のように変形します．

$$h^2=b^2-x^2=(b-x)(b+x) \tag{2.3.7}$$

$$a^2h^2=(ab-ax)(ab+ax) \tag{2.3.8}$$

式 (2.3.6) も同様に以下のように変形します．

$$a^2-2ax+(x^2+h^2)=c^2 \tag{2.3.9}$$

$$a^2-2ax+b^2=c^2 \tag{2.3.10}$$

$$ax=\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \tag{2.3.11}$$

式 (2.3.8) および式 (2.3.11) の関係から

$$a^2h^2=\left(ab-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\left(ab+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right) \tag{2.3.12}$$

面積 S は $ah/2$ であるから

$$\frac{ah}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(ab-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\left(ab+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)} \tag{2.3.13}$$

一方，

$$\begin{aligned}
&\left(ab-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\left(ab+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\\
&=\frac{1}{4}\left[c^2-(a^2-2ab+b^2)\right]\left[(a^2+2ab+b^2)-c^2\right]\\
&=\frac{1}{4}(c+b-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

以上の式 (2.3.13) および (2.3.14) より，ヘロンの公式が求められます．

$$\begin{aligned}
\frac{ah}{2} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(c+b-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}\\
&= \sqrt{\frac{1}{16}(c+b-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}\\
S &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

2.3.3　ヘロンと逐次近似

三角形を直角三角形に分解して面積を求めることは，手間がかかかりますが，ヘロンの公式を使えば，三角形の三辺を測定するだけで，その面積が求められます．大変便利ですが，常に平方根を求めることが必要になります．ヘロンは優れた公式を導きましたが，平方を求めるという新しい問題に直面しました．三辺がそれぞれ 4, 6, 8 の三角形の面積は，$\sqrt{9\cdot5\cdot3\cdot1}=\sqrt{135}$ となりますが，$\sqrt{135}$ を簡単には求められません．

まず，ヘロンはバビロニアで見つけられた方法を試しました．それは，次のような方法です．自乗して 135 に近い整数を探します．

$$11^2 < 135 < 12^2$$

ここでは，12 を初期値として次の近似値を考えると

$$135=(12+x)^2=144+24x+x^2$$

となり，$|x|<1$ なので x^2 を省略して

$$x=\frac{135-144}{24}=-0.375$$

$$12-0.375=11.625$$

が得られました．この 11.625 を第 2 番目の近似として同様に

$$135=(11.625+x)^2=135.1406+23.25x+x^2$$

が得られるので，$|x|<1$ なので x^2 を省略して

$$x=\frac{135-135.1406}{23.25}=-6.045\times10^3$$

$$11.625-6.045\times10^3=11.618955$$

第三近似値が得られます．電卓で計算する $\sqrt{135}=11.6189500$ となりますから，7 桁まで計算できています．

その次にヘロンが自ら考え出した方法は，次のようになります．$\sqrt{A}$ について

$$\sqrt{A} \simeq a \tag{2.3.16}$$

$$\sqrt{A} = a+x \tag{2.3.17}$$

と置きます．上式を展開すると

$$A = a^2 + 2ax + x^2 \tag{2.3.18}$$

となりますから，x^2 を省略して

$$x \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} - a\right) \tag{2.3.19}$$

から，

$$a + x \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a} + a\right) \tag{2.3.20}$$

となります．つまり，A/a と a の平均値が近似値を与えてくれます．いま，$a = 12$, $A = 135$ について計算すると

$$a + x \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{135}{12} + 12\right) = 11.625 \tag{2.3.21}$$

$$a + x \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{135}{11.625} + 11.625\right) = 11.61895 \tag{2.3.22}$$

$$\tag{2.3.23}$$

と求められます．このようにしてヘロンは平方根を求める方法を考え出しました．

近似計算の方法については，公式集などをみるといろいろな関数値を求める方法があり，プログラムなどの組み込み関数や計算でよくお世話になります．数学公式集を購入して，座右に置いておくと必ず重宝します．

問題

ヘロンまたはバビロニアの数学に習って，以下の逐次近似を求めましょう．[5]

1. $\sqrt{2}$
2. $\sqrt{3}$
3. $\sqrt{5}$
4. $\sqrt{7}$
5. $\sqrt{8}$
6. $\sqrt{10}$

[5] 一夜一夜に人見ごろ，人並みにおごれや，富士山麓オームなく，(菜) に虫いない，庭に橋，人丸は三色に並ぶ

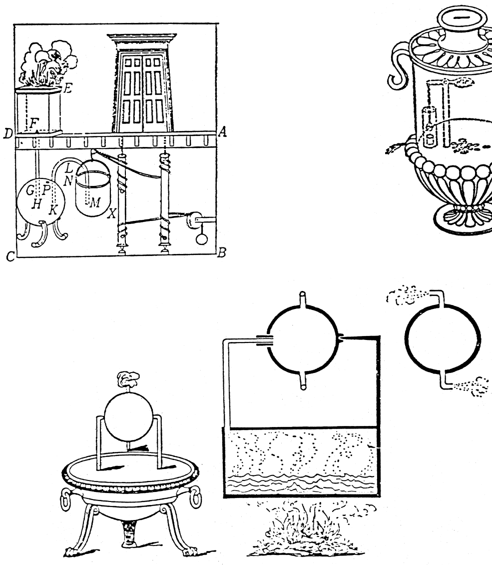


図 2.5: ヘロンの考案した機械装置

ヘロンは，B.C. 150 年頃の人といわれますが，正確な記録は見つかっていません．紀元後の生まれとする説もあるようです．活躍したところは，アレクサンドリアです．ギリシアのアリストテレスの教育を受けたアレクサンダー大王はギリシア文化と東西文化の融合をめざしました．このアレクサンダー大王が建設した都市がアレクサンドリアです．ヘロンは，数学に強かったようですが，機械の仕事もしています．図 2.5 はヘロンの考案した機械装置です．

(a) 祭壇に火をともすと神殿の扉が開き，祈りが終わり火を消すと自動で扉が閉まります．

(b) コインを入れると聖水が出てくる自動聖水販売機です．

(c) 蒸気の力で回転するタービンです．

どれもすばらしい仕掛けですが，奴隷制社会に置いては奴隷に苦役をさせることが社会の構造になっています．そのため，機械を利用して奴隷を楽にしようという社会的意志は働きませんでした．ヘロンの発明も，もっぱら神の絶対権力の誇示と，神に権力を与えられた王侯，貴族の支配の補強として用いられました．当時の機械の発達は，奴隷の拷問の道具にもみることができます．生産力の進歩よりも，権力維持の道具として機械があったわけです[6]．

問題

ヘロンの考案した機械装置の具体的仕組みについて説明してみましょう．

[6] このことについては,「機械と哲学」（P-M・シュル著，栗田賢三訳，岩波新書）が詳しい．ぜひ一読を勧めます．

2.4 円の面積から級数へ

各形状に対する面積計算の方法は，以下のように習いました．

$$\text{三角形の面積} = \frac{\text{底辺} \times \text{高さ}}{2} \tag{2.4.1}$$

$$\text{長方形} = \text{たて} \times \text{よこ} \tag{2.4.2}$$

$$\text{平行四辺形} = \text{底辺} \times \text{高さ} \tag{2.4.3}$$

$$\text{台形} = \frac{\text{上底} + \text{下底}}{2} \times \text{高さ} \tag{2.4.4}$$

$$\text{円} = \text{半径}^2 \times \text{円周率} \tag{2.4.5}$$

直線で表される形状の面積計算はよくわかりますが，曲線で表される円の面積については，どうしてそうなるのでしょうか．正確な解析方法を使って証明するには，まだ十分な準備をしていないので，公式として理解している実態にあると思います.（後で演習しする予定です.）

私たちは，このように公式として暗記している知識が意外と多いのではないでしょうか．正しいものと信じて，安易に受け入れていることが効率よく身につけるひとつの方法であることは否定しませんが，そのために，興味や関心，意欲がわかない原因になっている場合も多いのです．子どもの興味・関心・態度を育てるためには，単なる知識の詰め込み型の勉強をしてきた教師ではいけません．切り花のような知識は発展性に欠けるため，より高度の内容に進むに従い応用が利かなくなったり，概念がつかめなくなり，苦労するようになります．間違った知識を鵜呑みにした場合は，悲劇的です．[7]

さて，円の面積についてはどのようにして求めていたのでしょう．エジプトでは，直径が

[7]「方法序説」（デカルト著，落合太郎訳，岩波文庫）の中で，

1. 明証的に真であると認めることなしには，いかなることも真であるとして受け取らぬこと．
2. できうる限りの，そうして，それらのものをよりよく解決するために求められる限り細かな，小部分に分割すること．
3. 思索を順序に従って導くこと，知るにもっとも単純で最も容易であるものからはじめて，最も複雑なものの認識まで少しずつ，だんだんと登ること．
4. 何一つ取り落とさなかったと保証されるほど，どの部分についても完全な枚挙を，全般にわたり余すことなき再検査を，あらゆる場合に行うこと．

と述べています．科学の方法論として優れた指摘をしています．歴史に残る古典としてぜひ一読しておくことを勧めます．

9 の円の面積は，一辺が 8 の正方形の面積と同じとしています．

$$\frac{9^2}{4}\pi = 63.62 \simeq 8 \times 8 \tag{2.4.6}$$

かなり近い値を得ていることがわかります．

バビロニアのテキストでは，円周率を 3 としていました．より精度の必要な場合は，

$$3\frac{1}{8} = 3.125 \tag{2.4.7}$$

を利用していました．測定精度からみれば 0.5%の誤差ですから，ものを作るのには十分な精度です．

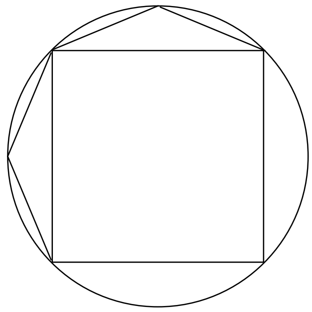


図 2.6: アンティプォンの円の面積計算法

ギリシャのソフィスト，アンティプォンは図 2.6 のように円に内接する多角形を 4 角形，8 角形，16 角形と増やして求めることを考えました．このように直接求めることはできなくても，徐々に足しあわせて行くことで，真の値に限りなく近づいて行くという考え方は，とても大切です．微分や積分，いろいろな計算に共通する発想です．大学入学前の知識では，解が一発で求められるものがほとんどであり，少しずつ近づく方法で真の答えが見えてくるという考えは少なかったと思います．これからは，このような考え方がたくさん出てきますので，意識の切り替えが必要です．

ソフィスト (sophist) たちは，B.C. 4, 5 世紀のギリシャで有能な市民になるために教養や学芸，弁論術を教えた教師たちです．ソフィアとは，知恵を意味しています．彼らのような家庭教師たちのような人が出現したのは，アテネ海軍がペルシア戦争[8]で勝利して，アテネがギリシアの諸市の盟主となり，黄金時代を迎えてからです．このとき民主制が確立し世襲

[8] B.C.500∼B.C.448 年にわたるギリシア諸市とペルシア帝国の戦争．ペルシア帝国によるイオニア諸市民のペルシア支配，ギリシア北部トラキア制圧を発端に戦争が始まりました．アテネ海軍がペルシア艦隊を撃破したサラミスの海戦により，エーゲ海の支配力を失ったペルシアの敗退は決定的となります．

制が廃止され，実力があればどんな人もあらゆる地位につける時代が到来します．教育的投資により金をもらってものを教える人たちが出てきたわけです．

プラトンは，ものを教えて金を取るのは邪道であると説いていましたが，プラトンのように多くの奴隷を持ち，左団扇のような生活を享受している身分と，ソフィストでは異なります．ソフィストは，かなりの教養を持ち数学的な仕事もたくさん行っています．ソフィストが高い知識を持てば，民主制といえども市民の9割が奴隷である現実の社会を批判することもあります．また，知識や技能を持っている奴隷により社会を維持していることも多かったのです．たとえば，イソップ童話のイソップも奴隷でした．奴隷の解放をソフィストが叫ぶことは，支配階級にとって快く思われない結果となります．ソフィストは詭弁をろうして，民衆をだましているということで，危険思想の持ち主と見なされることもあり，ソフィスト＝詭弁論者というレッテルを貼られたのが，歴史の一面でもあります．正しい思想，考えを主張する者は，権力の側でなく野にいることが時代の常です．野にいることを心地よしとすることが，真の学者であり，教師であることを，歴史は教えています[9]．どんなときも，野に下ることを良しとする勇気がとても大切です．

さて，細かく分けてたすことを考えてみましょう．アルキメデス[10]は，パピルスに図を描いて，切り抜いてその重さから面積を計算しています．次のように数列の和を級数といいます．

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots \tag{2.4.8}$$

この級数はいくつになるでしょうか．図2.7を参考にすると，級数が収束する値がわかりま

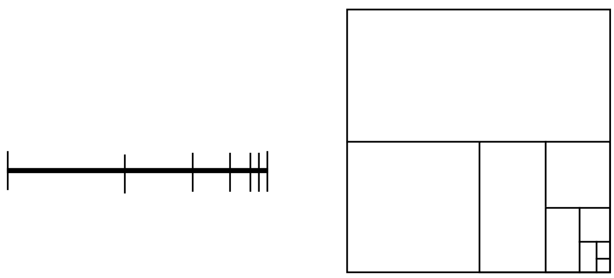


図2.7: 級数

[9]学閥に入ったり，権力の側にいる教師は，重大な争点において，正しいことを言い，正しい行動をとることが困難な局面に出くわすことがあるかもしれません．

[10]B.C. 287~B.C. 212．シチリア島のシラクサ生まれ，アレクサンドリアで学んだ後，比重，浮力，重心，複滑車，数々の兵器を考案しました．シラクサ陥落の時にローマ兵に殺されました．

す．このようにして，搾り出して計算していくことをアルキメデスは，いろいろ考えています．

2.5　級数理論から面積計算・定積分への拡張

細かく分けてたす級数を利用して，sin カーブの面積を計算してみます．

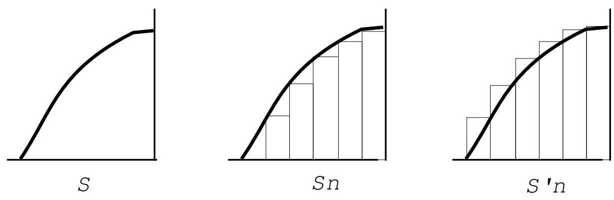


図 2.8: 級数

sin カーブを図 2.8 に示すように，短冊状に n 等分します．n 等分の仕方により S_n と S'_n の二つの場合がありますが，sin カーブの真の面積 S は，

$$S_n < S < S'_n \tag{2.5.1}$$

の関係にあるはずです．

まず，短冊の幅 b は

$$b = \frac{\pi}{2n} \tag{2.5.2}$$

となります．i 番目の座標位置 x_i は，

$$x_i = \frac{\pi}{2n} i \tag{2.5.3}$$

になるので，i 番目の高さ h_i は，

$$h_i = \sin \frac{\pi}{2n} i \tag{2.5.4}$$

i 番目の短冊の面積 S_i は，

$$S_i = \frac{\pi}{2n} \sin\left(\frac{\pi}{2n} i\right) \tag{2.5.5}$$

となります．これを用いて，全面積を求めてみると

$$S_n = \frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \cdot\ \cdot\ \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} \tag{2.5.6}$$

$$S'_n = \frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \cdot\ \cdot\ \cdot + \sin\frac{n\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2n} \tag{2.5.7}$$

式 (2.5.6) について考え，両辺に $\sin x$ を作用させると，

$$S_n \sin x = \frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\sin x + \sin\frac{2\pi}{2n}\sin x + \cdot\ \cdot\ \cdot + \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\sin x\right) \tag{2.5.8}$$

となります．ここで，

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \tag{2.5.9}$$

を利用します．[11]

$$\begin{aligned} S_n \sin x = \quad & \frac{\pi}{2n}\left[\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+x\right)\right.\right. \\ + \quad & \cos\left(\frac{2\pi}{2n}-x\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{2n}+x\right) \\ + \quad & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + \quad & \left.\left.\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}-x\right)-\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}+x\right)\right\}\right] \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

ここで，上式を簡略化するために以下のように工夫すると，

$$\frac{\pi}{2n}+x = \frac{2\pi}{2n}-x \tag{2.5.11}$$

$$x = \frac{\pi}{4n} \tag{2.5.12}$$

が得られます．この x を式 (2.5.10) に代入すると各項は

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2n}+x\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{2n}-x\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{2n}+x\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{2n}-x\right) \\ \cos\left(\frac{(n-2)\pi}{2n}+x\right) &= \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}-x\right) \end{aligned}$$

[11] Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を利用して，以下のようにいろいろな公式を導けます．

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}e^{i\beta} &= e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \end{aligned}$$

この実部と虚部を比較すると

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{aligned}$$

加法定理が得られます．和差と積の公式もこの応用です．問題で解いてみてください．三角関数の諸公式は全，く暗記の必要がなく，Euler の公式から簡単に求めることができます．複素数の学習をすると便利ですね．

の関係から消去され，最初と最後の項だけが残り，次式が得られます．

$$S_n \sin x = \frac{\pi}{2n}\left[\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}-x\right)-\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}+x\right)\right\}\right] \quad (2.5.13)$$

$$S_n = \frac{x}{\sin x}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}-x\right)-\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}+x\right)\right\} \quad (2.5.14)$$

ここで，$n \longrightarrow \infty$ にして極限をとると

$$x = \frac{\pi}{4n} \longrightarrow 0$$

$$\frac{x}{\sin x} \longrightarrow 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n}-x\right) \longrightarrow 1$$

$$\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}+x\right) \longrightarrow 0$$

となり，

$$S_n = 1 \quad (2.5.15)$$

が得られます．

同様に S'_n についても計算でき，$S'_n = 1$ となります（問題で解いてください）．式 (2.5.1) の関係から sin カーブの面積は 1 になります．正式な記号で，この定積分を表現すれば

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \quad (2.5.16)$$

となります．積分を知らなくても，その概念を利用して細かく分けてたすことで，定積分を解くこと，数値を得ることができます．コンピュータを利用して積分を解く数値積分の方法は，これと同じ方法です．

定積分の正式な記述については、次節で学習します。

問題 1

以下の関係を Euler の公式を用いて証明しましょう．

1. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
2. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$　　（以上，倍角の公式）
3. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

興味のある人は，ぜひ三倍角の公式も挑戦してください．

問題 2

1. $S'_n = 1$ を同様にして導きましょう．

2. $\cos\theta$ を前述の方法に従い，$[0,\ \pi/2]$ の範囲で定積分してみましょう．

2.6 定積分の定義

2.6.1 総和，極限，定積分

せっかく定積分の概念を学習したので，数学的記号を用いた表現にまで完成させましょう．いま図 2.9 に示すように関数 $f(x)$ があり，区間 $[a, b]$ を n 等分して

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,\ x_n = b$$

とします．

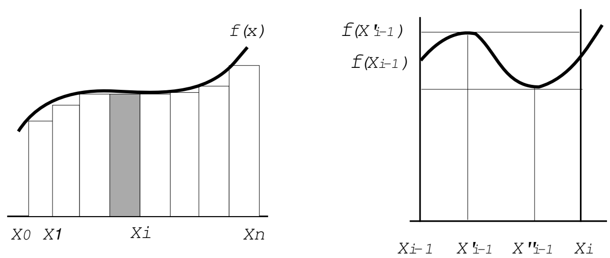


図 2.9: 関数の定積分

このとき，k 番目の長方形の面積を考えると，横幅は $x_k - x_{k-1} = \Delta x$ となり，高さが最も高い所が $f(x'_k)$，最も低い所が $f(x''_k)$ となるので，面積 S は，次のような関係にあります．

$$f(x''_i)\Delta x < S < f(x'_i)\Delta x \tag{2.6.1}$$

この関係を区間 $[a, b]$ 全体について総和すると

$$\begin{aligned} & [f(x''_1) + f(x''_2) + \cdots + f(x''_i) + \cdots + f(x''_n)]\,\Delta x \\ < \;& S \\ < \;& [f(x'_1) + f(x'_2) + \cdots + f(x'_i) + \cdots + f(x'_n)]\,\Delta x \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

の関係になります．この総和を記号でかくと

$$\sum_{i=1}^{n} f(x''_i)\Delta x < S < \sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\Delta x \tag{2.6.3}$$

となります．ギリシャ文字の Σ (sigma) は，sum(合計する) の頭文字を意味します．

さて，n を限りなく細かくとると，$f(x_i'')$ も $f(x_i')$ 区別できなくなるほど近づいてくるので，

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i'')\Delta x = S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x \tag{2.6.4}$$

となります．限りなく細かく分割すると言うことは，n を ∞ にすることであり，このことを極限 (limit) といいます．数学的には，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = S \tag{2.6.5}$$

と表現します．そして，これは区間 $[a, b]$ の定積分を意味するので

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \tag{2.6.6}$$

と表現します．積分の記号 $\int$ はラテン語の Summa(和) の頭文字 S の古い形です．

問題

$\sum$ や lim の記号およびその意味する概念に慣れておくことが大切です．その意味も含めて以下の問題を解きましょう．

1. $1+2+3+\cdots+n$ を $\sum$ の記号で表し，答えを導きましょう．[12]

2. 上の問題を拡張して，$a,\ a+d, \cdots, a+(n-1)d$ について同様に計算しましょう．[13]

3. 円の面積を多角形の総和にて表し，さらに極限を求めて，円の面積を求めましょう．

4. 円の面積を細かな環の総和にて表し，さらに極限を求めて，円の面積を求めましょう．

5. 初項 a，公比 r の数列の和 S_n を $\sum$ で表し，その答えを求めましょう．[14]

2.7　定積分の簡単な応用

定積分の概念をより物理的現象に対して適用してみます．

まず，運動する物体の 1 について考えてみます．図 2.10 の左側のグラフは，400 メートルを走ったときの様子です．速度 0 からスタートして加速しますが，スタミナ切れで速度が落ちてしまい，ゴールまで何とか走り込みました．若い皆さんは，このような走り方をするはずはないと思いますが，

[12] これは数学者のガウスが 10 歳の頃に即座に求め，教師を驚かせました．

[13] ガウスと同様の方法をつかいます．$n(2a+(n-1)d)/2$

[14] $S_n - rS_n$ について考えるとすぐわかります．

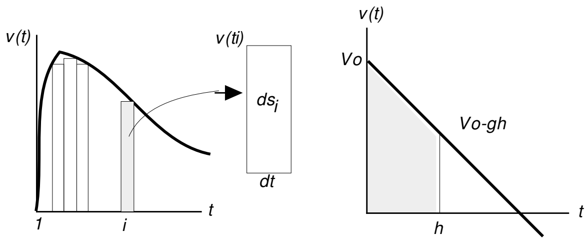


図 2.10: 物体の位置

さて，このグラフでランナーの位置はどのようにして求めればよいのでしょう．スタートしてからの時間 t と速度 $v(t)$ (velocity) の関係については，グラフの曲線で示されます．一定の速度であれば，位置は速度と時間をかけて得ることができます．速度 $v(t)$ が変化する場合は，図中のように細かく分けてたすことにより位置が得られます．i 番目の速度 $v(t_i)$ とその微小な時間 dt の積が，時間 dt に移動した位置 ds_i を示します．つまり，位置 ds_i の総和が位置 s を示し，それは曲線と t 軸により囲まれた面積を意味します．このことを式で表すと

$$s = \sum_{i=1}^{n} v(t_i)dt \tag{2.7.1}$$

dt を 0 に近づけるくらい細かく分ければ定積分になり，

$$s = \int_0^t v(t)dt \tag{2.7.2}$$

となります．

これを放物運動について利用します．図 2.10 の右側のグラフをみてください．重力加速度 g (gravity) の下では，打ち上げられた物体がどのように落下しますか．重力加速度は地面方向に向かって常に一定に働きます．いま打ち上げる方向を正にすると，初速度 v_0 で打ち上げた物体は，単位時間当たり g ずつ速度が低下して行き，頂点を過ぎると落下（負の速度）します．このような運動は右図にあるように，

$$v(t) = v_0 - gt \tag{2.7.3}$$

になり，時間 t の一次関数で表現できます．時間 h の時の位置 s は，先程と同様にして細かく分けて直線と時間軸の面積です．放物運動については，細かく分けなくても台形の公式により面積が得られ，

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v0 - gh)h = v_0h - \frac{1}{2}gh^2 \tag{2.7.4}$$

アリストテレス哲学を信じていた当時は，重い物は速く落ち，軽い物は遅く落ちると信じられていました．これらは究極の真実として扱われていたために，動機付けや証明もなしに教え込まされ，暗記させられていました．

ガリレオ[15] 身の回りの運動について興味を持ちアリストテレスの自然哲学に疑問を持つようになりました．ピサの斜塔から落下実験をした逸話がありますが，実は斜面を転がる運動により証明したようです．このようにして，ガリレオは落下距離が落下時間の2乗に比例

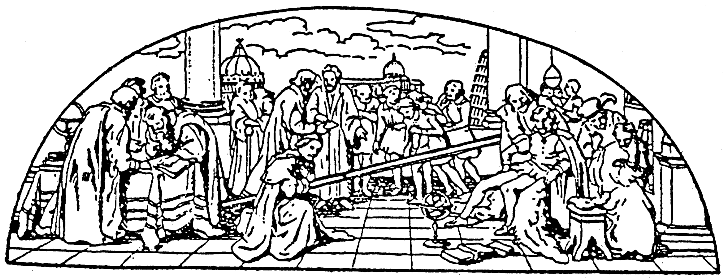


図 2.11: ガリレオの転がりによる落下実験

していることを確かめています．

ガリレオ以前の力学は，静力学と材料の強さについての力学がありました．しかし，運動する物体についての力学はありませんでした．ガリレオは，振り子の運動，自由落下そして望遠鏡による天体の観察から地動説に至るまで，多くの運動について研究しました．

ガリレオ以来，人類はようやく運動する物に目を向け始めました．しかし，ガリレオは加速度と力の関係について明確な関係を明らかにしませんでした．ガリレオが死んだ年に生まれたニュートンは，やがて力と加速度運動の関係を明確にしました．そして，力は宇宙天体に至るまでの物体の運動を説明する基本物理量であることを明らかにしました．

問題

加速度運動の基本である放物運動について慣れておきましょう。

[15]ガリレオ，ガリレイ, 1564-1642．機械工学で重要な学問である材料力学は，ガリレオの研究にはじまります．ガリレオの著書「新科学対話」（今野武雄，日田節次訳，岩波文庫）は，静力学から運動に至るまでの力学の問題を生き生きと市民の対話形式で表しています．この中で，材料の強度についても興味深い議論を展開しています．フィレンツェの近くの別荘で書いたガリレオの新科学対話は，警戒の目をくぐって，イタリアの国境を越えて1638年にオランダで出版されました．これらの経緯については,「ガリレオの生涯」（ブレヒト作，岩淵達治訳，岩波文庫）が，とても感動的に教えてくれます．ぜひ一読してください．

1. 地上から初速度 v_0 で真上に打ち上げた物体が達する高度 h と時間 t_1 を求めましょう。
2. 打ち上げた物体が地面に落ちる時間 t_2 はいくらですか。
3. 力について、どのように教わりましたか。なぜ力を学ぶことが大切なのかを討論してください。ガリレオとニュートンの研究の歴史的意義が見えてきます。

第3章　初等関数

3.1　座標と関数

ガリレオの研究した時代は，マニュファクチャの時代です．ガリレオは，よくベネチア海軍の造船所に出入りしていたようです．ガリレオよりも1世紀前の有名な人にレオナルド・ダ・ヴィンチ[1]がいます．彼は，弾道のデッサンを行い，放物運動についてのかなり正確な記録をしています．この時代には，工業の発展により大砲の製造の発達と同時に，正確かつ

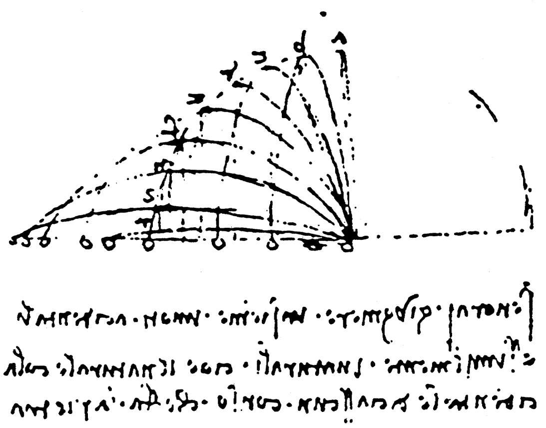


図 3.1: ダ・ヴィンチによる弾道のデッサン

効果的な弾の撃ち方についても研究がなされています．ダ・ヴィンチの方法の優れた点は，対象とするものが変化する場合に，二次元の中に正確に表現しようとしたことです．

私たちは，座標[2]を用いることによりいろいろな現象を表現することができます．

デカルトは，座標を利用していろいろな関係を表し，座標を用いて幾何学の研究により，

[1]1452～1519 モナリザ，最後の晩餐などルネッサンスを代表する画家．彼の優れたデッサン方法は，現代の図法，製図法の基礎になっています．また，機械などの発案も多く，技術者としての仕事も多く手がけました．彼の発案した空を飛ぶ回転翼機は，現代のヘリコプターの原理に通じています．

[2]座標の考えを初めて示したのは，フランスのニコル・オレム（1323～1382）です．彼は，天体の運動を座標で表しました．

解析幾何学の基礎を築きました．座標の利用で大切なことは，x, y などを未知数として使用していましたが，変数として扱うようになったことです．自然や社会の現象は互いに関連しあい，及ぼしあい変化しています．このように変化しているものを変数というもので表すことに拡張しました．変数の導入により数学が一変したのです．[3]

明確に関数 (function) ということばを使用したのは，ライプニッツ (1646 ～ 1716) です．y は x の関数というようになりました．オイラー (Euler) は，これをより数式的に表現して，

$$y = f(x) \tag{3.1.1}$$

という表現を提唱しました．数学が苦手になった原因を作ったのは，オイラー先生でしょうか．とにもかくにも，$F(x), G(x), g(x)$ などの記号表現によく親しむことがとても大切です．

問題

次の表に示される関係を座標で描き，どのような関数になっているのかを調べましょう．x, y はいったい何を表していますか．[4]

x	100	200	300	400	500	600	700	800	900
y	105	210	315	420	525	630	735	840	945

3.2 初等関数

きっと，高校で既に初等関数を習っていますが，微・積分の学習の前に，再学習することはとても大切です．一次関数や二次関数などの性質については，自分でしっかりと学習してください．この節では，三角関数，指数関数，対数関数について学習します．

[3]エンゲルスは，自然の弁証法で，数学における転回点はデカルトの変数にあると指摘しています．それによって運動があらわされ，変化を取り扱う微積分学が登場してくることになります．このように考えると，ニュートン，ライプニッツは微積分学を完成したのであり，彼らにより発見されたのではない，と述べています．

[4]研究においても，実験結果をプロットして，それから関係式を導くことも多いものです．経験式，関数近似などは，これと同じ作業でとても大切です．

3.2.1 三角関数

3.2 に正弦 (sine)，余弦 (co-sine)，正接 (tangent) の定義を図で示しました．三角関数の定義がわからない人は，まずこの定義から身につけておくと忘れません．

正弦は，図にあるように角度 2θ により作られる弦の半分です．もともとの語源はインドのアルドハ・ジバ（半分の弦）です[5]．それがアラビア語，ラテン語，英語に訳されて，sine になりました．

余弦は，余角の正弦に当たり，ラテン語で sinus complementi と名づけられました．これを co-sinus しました[6]．

正接は，図のように，日時計の陰の長さから考え出されましたが，1583 年にトーマスフェンチにより tangent とよばれ，これは接線を意味しました．単位円から引いた接線の長さを意味します．三角形の辺からそれぞれの比を求めるだけであれば，三角比といいますが，角

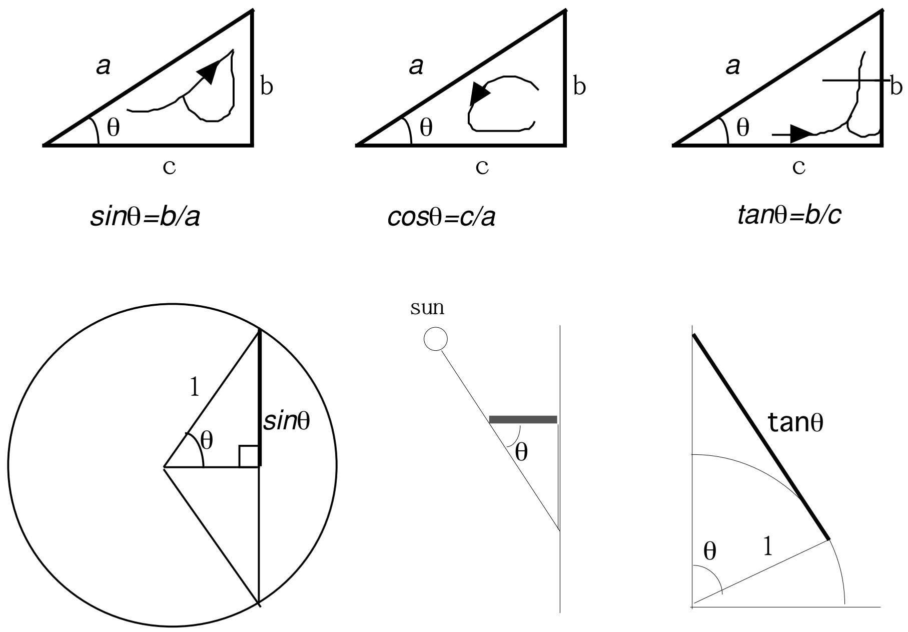


図 3.2: 三角関数の定義

度を変数として利用すると三角関数となります．三角関数をグラフに示すと，図 3.3 になります．グラフの形を見て何か想像できませんか．sin, cos は，振動，波動を表すときによく利用されます．振動・波とは,「周期のある現象」です．これから学ぶ物理現象で，周期性の

[5] 6 世紀かそれ以前に書かれたインドの［スーリア・シッダーンタ（太陽系)」という書物の中にアルドハ・ジバ（半分の弦）の表が記されています．

[6]イギリスのガンター（1581-1626）が 1620 年頃にこう呼んだようです．

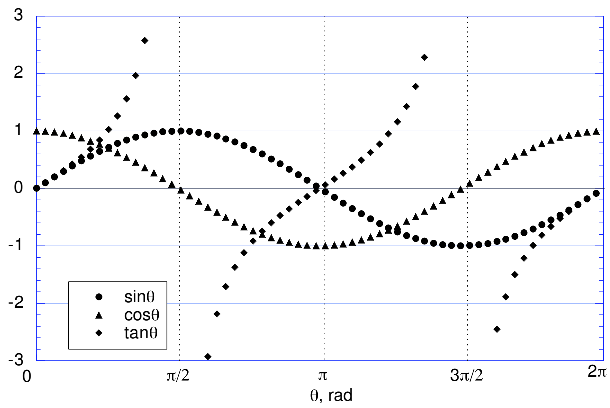


図 3.3: 三角関数のグラフ

ある現象には必ずと言っていいほど，三角関数が出てきます．

グラフの横軸の角度の表現も重要です．いままでは，度 (degree, °) を利用していましたが，解析には利用できませんので，弧度法 (radian) を使用してください[7]．

問題

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を証明してください．
2. $\sin(x + \pi/2) =$
3. $\cos(x + \pi/2) =$
4. 三角関数を利用することで，**極座標**による表示ができるようになります．図 3.4 (a) に示す x, y を極座標で表示してみましょう．
5. 極座標の表示の応用として，成分分解も大切です．図 3.4 (b) に示すように，角度 θ の斜面にある質量 m の重さ W は mg になります．これを斜面に平行な力 F_h と斜面に垂直な力 F_v に成分分解をしてください．
6. 初速度 v_0，仰角 θ_o で打ち上げた質点の速度ベクトルを v_x，v_y の成分で表現しましょう．さらに，時間経過 t と共に v_x，v_y がどのようになりますか．

[7] 微分・積分に伴い係数が複雑にならないようにするために，弧度法が生まれました．角度と単位円の弧の長さが同じ角度の表現です．これについての詳しい話は，三角関数の微分のところで扱います．

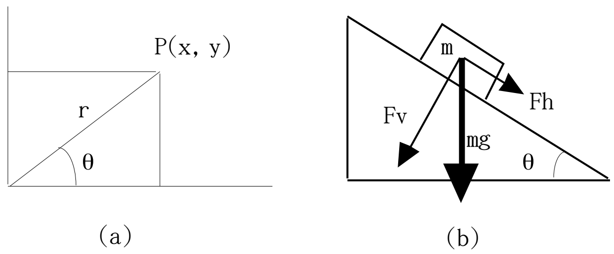


図 3.4: 極座標と成分分解

3.3 指数関数

X線は透過性が強いので，医療用に利用されます．人間の体の内部に入射したX線の強さはどのように変化するのでしょう．皮膚表面でのX線強度を I_0 とし，$x$cm 内部の強度は，I_0 の $f(x)$ 倍に減衰するので，$I_0 \cdot f(x)$ になります．さらに y 深いところは，$I_0 \cdot f(x)$ の $f(y)$ 倍に減衰するので，$I_0 \cdot f(x)f(y)$ になります．これは，皮膚の表面から $x+y$ の深さになり

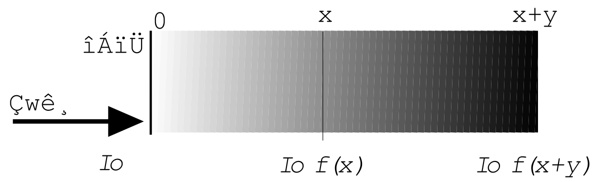


図 3.5: 表面から浸透したX線強度

ますから，$f(x+y)$ 倍に減衰しています．つまり，

$$I_0 f(x) f(y) = I_0 f(x+y)$$
$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) \tag{3.3.1}$$

となります．

このような関係になる関数はどのような形になるかわかりますか．皮膚の表面のX線強度は I_0 ですから，$f(0)=1$ となることも想像できます．無限に深い皮膚の中ではX線強度が 0 になりますから，$f(\infty)=0$ になります．関数形を想像すれば，[8]

$$f(x) = a^{-x} \tag{3.3.2}$$

[8] X線の強度 $I(x)$ は，材料の通過距離 x に従い減衰するので

$$-\frac{dI}{I} = \mu dx$$

の関数になることが想像できます．

指数関数は指数部に独立変数のある関数で，

$$f(x) = a^x \tag{3.3.3}$$

に代表される関数です．

問題

指数関数 $f(x) = a^x$ から，いろいろな関係を導きましょう．

1. $f(x)^\alpha = f(\alpha x)$
2. $f(-x) = 1/f(x)$
3. $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$
4. 指数関数の具体例を探してみましょう．[9]

3.4　対数関数

指数関数の逆関数を考えてます．つまり

$$y = a^x \tag{3.4.1}$$

$$x = \log_a y \tag{3.4.2}$$

これと同様なことから

$$f(x) = \log_a x \tag{3.4.3}$$

を対数関数といいます．a を底といいます．a を $f(a)$ 乗すると x になります．

で表現できます．式を積分すると，

$$I = I_0 \exp(-\mu x)$$

となります．ただし，I_0 は入射 X 線強度，μ は線吸収係数といわれます．概略的には，密度の大きいものほど線吸収係数が大きくなり，X 線の防護効果が大きくなります．レントゲン写真で，金属が嫌われるのはそのためですが，アルミなど密度の小さい金属は防護効果が小さくなります．

[9]細胞の増殖，原子核の崩壊などが好例です。身近な世界を数量的に扱うことに慣れておくことが、工学にとってとても大切です。

対数にも常用対数と自然対数があります．

$$(\text{常用対数}) \qquad \log_{10} x \tag{3.4.4}$$

$$(\text{自然対数}) \qquad \log_e x = \ln x \tag{3.4.5}$$

自然対数の底は e となります．[10]

問題 1

対数関数 $f(x) = \log_a x$ の関係を導きましょう．

1. $\log_a xy = \log_a x + log_a y$

2. $k \log_a x = \log_a x^k$

問題 2

表 3.1 を両対数のグラフにしてみましょう．き裂長さと破壊強度の関係にはどんな関係がありますか．[11] 研究において，二つの物理量が複雑な関係に見えても，ある一定の法則で成り立っていることが多いものです．両対数，方対数，方眼紙などのグラフにより関係を見つけることができます．少しは対数関数の有用性がわかったでしょうか．

---

[10] 自然対数の底 e は，

$$e = \lim_{k \to 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}} = 2.7182818$$

となります．これは対数関数の微分に伴う係数の扱い易さから生じた値です．詳しくは，対数関数の微分をしてみると自然対数の意義が明確になります．

[11] き裂長さ a と破壊強度 σ_B には

$$K_C = \sigma_B \sqrt{\pi a}$$

の関係があり，K_C を破壊じん性といいます．破壊じん性は材料値であり，同じ材料でもき裂長さにより破壊する応力値が低下することがわかります．その関係は

$$\sigma_B = \frac{K_C}{\sqrt{\pi a}}$$

です．

表 3.1: き裂長さと破壊強度

き裂長さ a (mm)	1	10	20	40	100
破壊強度 σ_B (MPa)	285	90.2	63.8	45.1	28.5
$\log_{10} a$	0	1	1.3	1.6	2
$\log_{10} \sigma_B$	2.45	1.96	1.80	1.65	1.455

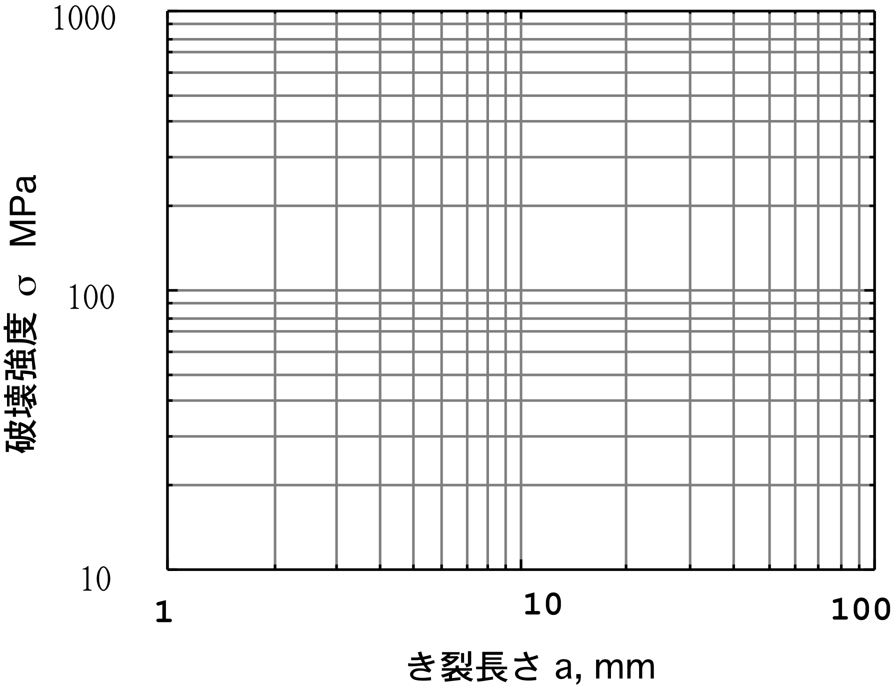


図 3.6: き裂長さと破壊強度のグラフ

第4章　微分への発展

「学問の険しい坂道をよじ登る労苦をいとわないものだけに，その頂にたどり着く可能性があるのだ」とマルクスの資本論にあります．この基礎解析の頂は，まさにこの章です．

ガリレオは，運動するものを物理学の対象にし，それを表現しましたが，運動を支配する物理量 = 力を見つけることはできませんでした．力の発見は，ニュートンを待たなければなりませんでした．ニュートンが発見した万有引力について，学習しながら微分の考え方を身につけましょう．

4.1　月とリンゴ

ニュートンは，ペストが流行したため故郷に帰っているときでした．リンゴの落ちるのを見て万有引力を発見したという逸話は有名ですが，リンゴが地球に落ちるのに対して，月はどうなっているのかに興味を持っていたようです．

月は，27 日 7 時間 43 分の周期で地球をまわっています．まわっていると言うことは，図 4.1 に示すように θ まわっては x だけ地球に向かって落下していることになります．

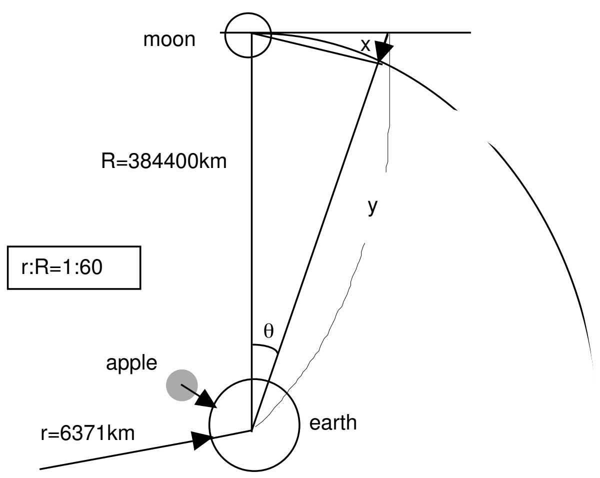


図 4.1: リンゴは落ちてくるのに，月は落ちないの

θ 回転したときの落下距離 x は

$$x = y - R \tag{4.1.1}$$

となります．

$$y = \frac{R}{\cos\theta} \tag{4.1.2}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta \tag{4.1.3}$$

上式の関係より

$$y = R\sqrt{1+\tan^2\theta} \tag{4.1.4}$$

が得られるので，落下距離 x は

$$\begin{aligned} x &= R\sqrt{1+\tan^2\theta} - R \\ &= R(\sqrt{1+\tan^2\theta} - 1) \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

となります．

一分間の θ を計算すると

$$\theta = 2\pi \frac{1}{27\text{日}7\text{時間}43\text{分}} = \frac{2\pi}{39343\text{分}} = 1.597 \times 10^{-4}\text{rad}$$

となり，

$$\sqrt{1+\tan^2\theta} - 1 = 1.28 \times 10^{-8}$$

が得られます．地球と月の距離 R は 384400km　ですから

$$x = 3.844 \times 10^8 1.28 \times 10^{-8}\text{m} = 4.9\text{m}$$

となり，1 分間に 4.9m ほど地球に落下していることになります．

一方，リンゴの落下距離 S は 1 分間 (60 秒) で，

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \tag{4.1.6}$$

$$= \frac{1}{2}9.8 \times 60^2 = 4.9 \times 60^2\text{m} \tag{4.1.7}$$

となります．つまり，地球に落下するときの重力加速度について考えると

$$\text{地表} \quad S = \frac{1}{2}gt^2 = 4.9 \times 60^2\text{m} \tag{4.1.8}$$

$$\text{月} \quad x = \frac{1}{2}g_{moon}t^2 = 4.9\text{m} \tag{4.1.9}$$

となり，

$$\frac{g_{moon}}{g} = \frac{1}{60^2} \tag{4.1.10}$$

月では地表の 60 分の 1 に減少していることがわかります．これは，地球の半径 r は 6371km，月の回転半径 R は 384400km ですから，ちょうど r/R に対応しています．このことから万有引力は距離の自乗に反比例することがわかったのです．

地球から受ける重力 F の大きさは

$$F = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{4.1.11}$$

となり，M は地球の質量，m は地球に引かれる質点の質量，r 地球の中心からの距離， G は重力定数（ニュートン定数）と呼ばれます．これを万有引力の法則といいます．

ニュートンのようにマクロな運動や変化からミクロの運動や変化をとらえるのが微分学ですつ．まり，マクロの運動を微小な時間変化によりミクロにすることで，万有引力の法則を見つけることができたのです．これにより，質量と重力が明確に区別されるようになりました．ニュートンの考え方に学ぶところはたくさんあります．リンゴの落ちる現象を拡張し，リンゴの高さを月の高さにまで拡張して考えることにより万有引力を見つけ出していることは，重要な点です．[1]

問題

重力定数 $G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg\ sec}^2$ として，地球の質量 M を求めてみましょう．[2]

4.2　ニュートンについての覚書

ニュートンは 1642 年にイギリスのリンカーンシァ州ウールスソープに生まれました．彼の父はアイザックという農夫で，ニュートンの生まれる 3ヶ月前に亡くなっています．ニュートンが 3 歳の時，母は裕福な牧師と再婚しますが，ニュートンが 14 歳の時にその牧師は亡くなり，母再婚したときに生まれた子どもを連れてウールスソープに戻ってきます．

[1]身近なことを拡張して，多くのことを考えることが私たちには大切です．身近な生活や人間関係だけで考えが閉じていることは，自己中心に陥ります．しかし，これを広い人間関係や社会に拡張していくことで，政治や社会も身近なものと同じことがわかってきます.「君たちはどう生きるか」（吉野源三郎著，岩波文庫）の中にも,「ニュートンの林檎と粉ミルク」の章で，このことを指摘しています．この本は，軍国主義の勃興と言論弾圧の中で，次世代を担う子どもたちに人類の進歩とヒューマニズムを伝えるために刊行されました．しかし，太平洋戦争が始まってからは，それすら刊行ができなくなりました．

[2]$M = 5.97 \times 10^{24}\mathrm{kg}$

12 歳のニュートンは王立学校に通い，その当時は機械仕掛けの玩具，模型づくりに才能を発揮したと言われます．長男として農場を経営する才能はないが，人並みはずれた才能を認めた学校長や叔父が母を説得し，大学へ進ませました．1661 年，ニュートンはケンブリッジのトリニティーカレッジに入学します．1603 年に江戸幕府を開いたことに比較すると，イギリスでは既に大学があり，才能にある人をみつけて，学問研究の機会を与えられていたわけです．戦後の新制大学の発足と比較すれば，日本の大学の歴史はまだまだです．

1665 年に大流行したペストの避難のために，ニュートンはウールスソープに戻り，2 年ほどそこに身を寄せる間に，偉大な発見をすることになります．一つは，流率法をここでまとめ上げています．それは，重力の働くリンゴと月の比較から，やがて万有引力の発見につながっていきます．第二は，光のプリズムによる分光により，白色光は相異なる色の光線からなることの発見です．ペストの流行が下火になると，ケンブリッジに戻り数学教授の後任となります．

ニュートンは，先人たちが躓いたのが「力の概念」であり，まちまちであった力の概念を一般化し，運動の 3 法則

1. 力の作用しない場合は，静止または等速直線運動をする．

2. 物体の加速度は力に比例し，質量に反比例する．

3. あらゆる作用にはその大きさが同じで，向きが反対な反作用がともなう．

を作りました．あらゆるものが力によって運動し，運動は力により表現できることがわかったのです．力の方程式を運動方程式といいます．問題はすべて力で表現し，方程式に表すことが基本原則となるわけです．

力を知ることが，自然を知る基本の一つになります．学校で自然を学ぶと言うことは，力を知ることに他なりません．力とは何かを知らないことは，社会で人権を知らないことと同じことです．人権により，社会のあり方や人間としての基本原則がわかります．この人権を知るために，どれだけ多くの犠牲と歴史を重ねてきたのかが，社会の学習ではないでしょうか．これと同じように，力を認識するまでの人間の努力と歴史，力という物理量が持つ重要性と意義を身につけることが何よりも大切です．

ニュートンは，1672 年に王立協会の会員となり，42 歳になり「自然哲学の数学的原理」（プリンキピア）[3] を書き始めます 44 歳で完成しました．そして，46 歳で国会議員に選出さ

[3]ニュートンが 1687 年に著したプリンキピアにより，運動の 3 法則が明らかにされ，古典力学は一応の完成

れています．このころのニュートンは，髪もぼさぼさ，ニュートンの講義には学生はほとんど集まらず，誰もいない教室から戻ってくることもしばしばだったそうです．「私が世間の目にどのように映っているかはわからない．しかし，私自身には，海辺で遊び，普通よりつるつるした石やかわいらしい貝殻を見つけ出しては，時折気をまぎらわしている少年のように思われる．一方，真理の大海は，全く発見されないまま，私の目の前にある．」とニュートンは述べています．

やがて，ニュートンは諸々のことが重なり神経衰弱に陥ったようです．53 歳になったニュートンは，ケンブリッジに別れを告げ，造幣局の仕事に就き，その後その長官となります．1727 年 3 月 20 日，85 歳の生涯を閉じました．

をみました．しかし，プリンキピアはたいへん難解な幾何学を駆使して書かれています．代数は一つも出てきません．よく「ニュートンの運動方程式」と言いますが，方程式という言葉は，デカルトによるものです．学校の教科書に出てくる「ニュートンの力学」のように理解できるようになったのは，ベルヌーイ一族，オイラー，ダランベール，ラグランジュといったヨーロッパ大陸の 18 世紀の偉大な学者たちの成果です．

ダニエル・ベルヌーイ (1700-1782) は，微積分学，微分方程式論，確率論，振動学を研究，数理物理学の父とも言われる．彼の流体力学の「ベルヌーイの定理」は機械工学を学ぶ人で知らない人はいません．彼は，荷重のかかったはりのたわみ曲線が数式で著すことを友人のオイラーに示唆していました．

オイラー (1707-1783) は，数学に加え材料力学，機械力学，流体力学も研究していました．彼の抜群の才能をダニエル・ベルヌーイの父ヨハネ・ベルヌーイに認められ，これが人生の転機となります．オイラーの「解析的に扱った運動の科学」(1736) により剛体の力学が完成しました．力学におけるオイラーの最大の功績は,「運動方程式」を提示したことです．ニュートンの運動の第 2 法則を $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ と表現したのが，オイラーです．オイラーは，円周率 π，対数の log，虚数の i をなどの記号も作っています．自然対数の底 e も Euler の頭文字ではないでしょうか．

実際の機械や装置は，拘束されて運動しています．そのため，機械の中での運動はけして，自由に動くわけにはいきません．拘束された運動をオイラーの運動方程式により解析すると，反力や張力など未知の力をたくさん含むことになり，複雑になりがちです．このような場合，未知な力を含まないで運動方程式を立てることを考えたのが，フランスの数学者ダランベール (1717-1783) です．彼は「力学概論」(1743) によりダランベールの原理を示しました．ダランベールの難解な表現を $F + (-ma) = 0$ と表現し，ダランベールの原理と言ったのは，ダランベールの弟子のラグランジュです．

ラグランジュ(1736-1813) はトリノに生まれ，彼の論文を読んだオイラーに才能を認められ，ダランベールとオイラーの推薦によりベルリン科学アカデミーの教授になります．フランス革命により革命政府に呼び出され，創立したばかりのエコル・ポリテクニクの数学教授となります．彼の「解析力学」(1788) は仮想仕事の原理とダランベールの原理を用いて「ラグランジュ方程式」を示しました．これは，往復運動と回転運動が混在した系の表現には有力です．

このようにして，ニュートンからはじまった力学は，オイラー，ダランベールの手を経て，ラグランジュにより整理・統合されました．プリンキピア以後，偉大な科学者たちが 100 年の歳月をかけて，力学が体系化されたのでした．

第5章　微分学

5.1　導関数（接線の傾き）

複雑に運動，変化するものをそのままとらえることは難しいものです．しかし，微小区間，微小時間（瞬間）で見てみると，それは直線の集まりと見なすことができます．この変化する関数や現象の直線は，接線です．図5.1に示すようにP点における接線を定義します．

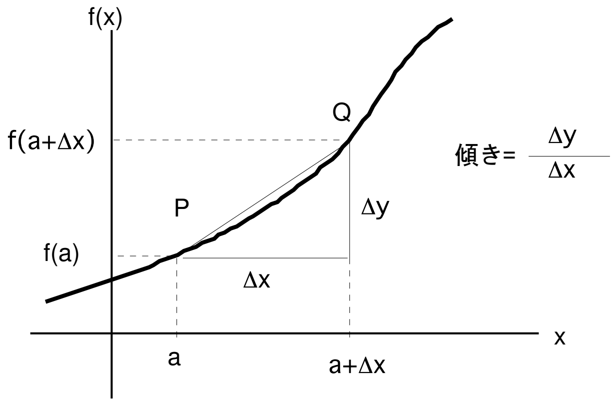


図 5.1: 接線の傾き

$x=a$ における傾き α は

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta y)-f(a)}{\Delta x} \tag{5.1.1}$$

いま，PQがかぎりなく0に近づくと，$x \longrightarrow 0$ となり傾きはある値に近づきます．a を変数 x に一般化して考えると

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \tag{5.1.2}$$

と表現し，これを導関数[1]といいます．明確に定義すると

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{5.1.3}$$

になります．これは,「関数 y の x による微分」といいます．

[1]英語では，derived function といいます．中国語では，これを音訳して導来関数と言います．これが日本に渡り導関数になりました．

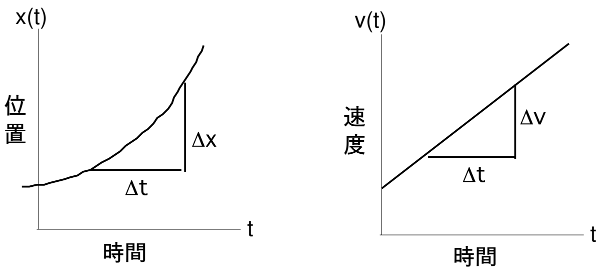


図 5.2: 速度，加速度の表現

これを運動に適用してみましょう．図 5.2 に位置と時間，速度と位置の関係をグラフで示しました．位置が時々刻々と変化するのは，速度があるからです．速度を求めるには，移動距離を時間で割ればよいので，その時々の速度 v は，位置 x の時間 t による微分になり

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} \tag{5.1.4}$$

と表せます．

質点に力が作用すると，その速度が変化します．単位時間当たりの速度の変化を加速度といいます．ゆえに，加速度 a は，

$$a = \frac{v(t)}{t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{5.1.5}$$

と表せます．

このような微分の演算記号の表現にもよく習熟しておくことが大切です．

問題

運動量 p は，質量 m と速度 v の積で定義される物理量です．力が作用すると速度 v が変化するので，運動量 $p = mv$ も変化します．この質点に作用する力 F を運動量 p の微分形で表現しましょう．

5.2　x^n の微分

いま，関数を次式のように

$$f(x) = x^n \tag{5.2.1}$$

すると，導関数は以下の式で定義されるます．

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \tag{5.2.2}$$

- n が自然数のとき

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \tag{5.2.3}$$

を利用すると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} &= \lim x \to a(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}) \\ &= na^{n-1}\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

- $n = 0$ のとき

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^0 - a^0}{x-a} = \frac{1-1}{x-a} = 0 \tag{5.2.5}$$

- n が負の整数のとき

$n = -m$ (m は自然数) とすると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^{-m} - a^{-m}}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x^m} - \frac{1}{a^m}}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{-x^m + a^m}{x^m a^m (x-a)} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{(a-x)(a^{m-1} + xa^{m-2} + \ldots + x^{m-1})}{x^m a^m (x-a)} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{-(a^{m-1} + xa^{m-2} + \ldots + x^{m-1})}{x^m a^m} \\ &= \frac{-ma^{m-1}}{a^m a^m} \\ &= -ma^{-m-1} = na^{n-1}\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

以上の結果をまとめると

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \tag{5.2.7}$$

問題

以下の関数を x について微分しましょう.

1. $y = x^3$
2. $y = \dfrac{1}{x^2}$
3. $y = (2x-1)^3$

4. $y = (x-1)(x^2-2x)$

5. $y = \sqrt{ax}$

6. 航空機が規定内の最高速度で着陸してから停止するまでの距離 s(m) と時間 t(sec) の関係は，

$$s = 100t - \frac{1}{2}t^2$$

で表現されると仮定します．必要な滑走路距離 L_{max} はいくらになりますか[2]．

7. x^α において $\alpha = n/m$ のとき，導関数はいくらになりますか[3]．

5.3　三角関数の微分

ここでは，sin 関数を例にその微分を求めます．また，かつて習った弧度法 [rad] の本当の意味，便利さを学ぶこともこの節の目的です．

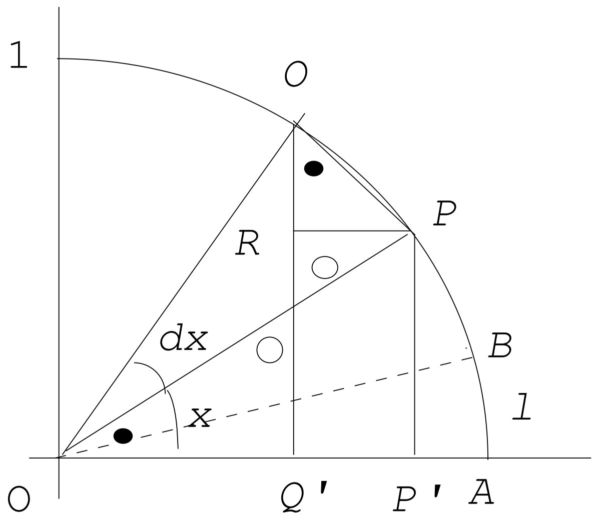


図 5.3: sin 関数の微分と角度の定義

まず，微積分に伴う角度の定義を行います．角度の単位を定義します．図 5.3 に示すように，$\angle AOB$ を 1 単位角と定義し，その弧の長さを利用して表現すると

$$\overset{\frown}{AB} = l \tag{5.3.1}$$

[2] 速度が 0 になる時間からその滑走距離を求められます．

[3] $x^{1/m} = y$, $a^{1/m} = b$ とおいて，分母と分子において本文と同様にして導くことができます．

となります．それにより，　角度 x, $x+\Delta x$ は

$$x = \frac{\angle AOP}{\angle AOB} \tag{5.3.2}$$

$$x+\Delta x = \frac{\angle AOQ}{\angle AOB} \tag{5.3.3}$$

となり，弧の長さは

$$\overset{\frown}{AP} = xl \tag{5.3.4}$$

$$\overset{\frown}{AQ} = (x+\Delta x)l \tag{5.3.5}$$

になります．

$$\overset{\frown}{PQ} = \Delta xl \tag{5.3.6}$$

$$\Delta x = \frac{\overset{\frown}{PQ}}{l} \tag{5.3.7}$$

これらの角度関係を次の微分で利用します．

微分の定義に従いながら，$\sin x$ について検討しましょう．

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta c\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{QQ'-PP'}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{QR}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{QR}{\frac{\overset{\frown}{PQ}}{l}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{QR\cdot l}{\overset{\frown}{PQ}} \\
&= l\lim_{\Delta x\to 0}\frac{QR}{PQ} \\
&= l\cos x
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

すなわち，

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{l\Delta x\cos x}{\Delta x} \tag{5.3.9}$$

$$= l\cos x \tag{5.3.10}$$

が得られます．

さて，上の式を見てください．微分に際して角度に関する係数 l が現れるのは何とも都合がよくありません．$l=1$ になると，微分・積分において取り扱いが容易になります．そのためには，弧の長さが $l=1$ になる角度を単位角度にした角度表記が必要です．図 5.4 に示

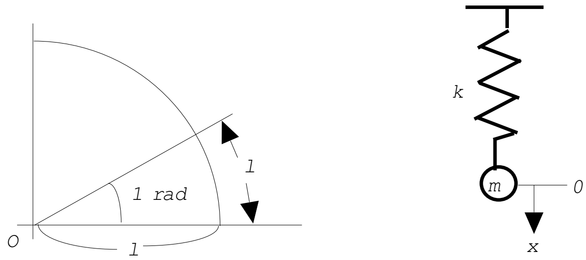


図 5.4: rad の定義

すように単位円の弧長が 1 になる角度を 1rad としました．弧度法を利用すると

$$(\sin x)' = \cos x \tag{5.3.11}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{5.3.12}$$

が得られます．

問題[4]

1. 同様に，$\cos x$ の導関数を求めましょう．
2. $y = \sin ax$ を二階微分しましょう．
3. $y = A \cos bx$ を二階微分しましょう．
4. $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ を微分しましょう．
5. バネの運動方程式は，$m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ となります（．図 5.4 参照）この微分方程式の解を考えてみましょう．[5]

[4]微分によく利用される以下の方法を少しずつ身につけておきましょう．

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

[5]「エンジョイ力学実験」（阿部宏之，鈴木賢治著，コロナ社）を参考にしてください．わかりやすく説明しています．

5.4 対数関数の微分

三角関数の次に対数関数の導関数を求めます．ここでも，微分の考え方を原則を適用していきます．また，自然対数の底 e の意義を理解することも目的の一つです．

対数関数は

$$f(x) = \log_a x \tag{5.4.1}$$

と表します．この導関数は，

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} && (5.4.2) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x}) && (5.4.3) \end{aligned}$$

$\frac{\Delta x}{x} = k$ とすると $\Delta x = xk$ より，$\Delta x \longrightarrow 0$ のとき $k \longrightarrow 0$ となります．これらを上式に適用すると，

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{k \to 0} \frac{1}{kx} \log_a(1+k) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \log_a(1+k) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} && (5.4.4) \end{aligned}$$

が得られます．この結果より，

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} \tag{5.4.5}$$

となりますが，$\lim_{k \to 0} \log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}$ というやっかいな係数が現れてしまいます．この極限を計算すると，

$$\lim_{k \to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = 2.718281828459045 = e \tag{5.4.6}$$

となり，e という定数が得られます．この e を定数として log をとると

$$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x} \tag{5.4.7}$$

になり，微分に伴う係数が現れません．

このように，log の底を e にすることにより，微分の操作が手際よく計算できるようになります．e を底にした対数を自然対数と呼び $\log_e$ 記しますが，一般には e を省略して，log と表現します．自然対数を強調したい場合は，ln の記号も使用します．

高校で学習した弧度法 (rad) や自然対数の e は，微分の操作性をあげるために生まれてきました．その意味では，微分学を通して弧度法や自然対数を学ぶのが本来の方法です．みなさんの弧度法や自然対数の学習経験とここでの学び方を比較すると，無理にねじ曲げた学び方は，よい学習方法でないことがよくわかると思います．教壇に立ったとき，優れて正しい学習方法に沿った授業を展開できるかは，深く科学を学んでいるか否かにかかっています．[6]

また，人類の科学の認識過程は，子どもの認識過程と類似しています．科学の歴史的発展は，体系という形で整理されています．その意味でも，科学を体系的に学ぶことが大切です．安易な選択方式で学習課程を編成することは，理工学離れを起こす原因になると同時に，理工学の学習障害にもなります．大学時代は，体系立ててじっくり学問ができる人生で唯一のときです．そこに，教員になるための準備を見つけてほしいと願っています．

ここまで来れば，力学の広い海への航海の基礎はできました．諸公式と積分の仕上げが終われば，力学の海に出航です．機械工学の大陸にたどり着くのは，いつの日でしょうか．機械は，英語で mechanical engineering と言います．mechanics は力学であり，engneering は工学です．機械工学の直接の意味は，力学工学です．生産に関わる力学を体系化したものが，機械工学の本当の学問です．その体系は，固体力学，流体力学，熱力学の三大力学から構成されています．一般常識からすると，機械装置を思い浮かべますが，その発想を改めることが大切です．[7]

問題

1. $\log x + 1$ を微分しましょう．
2. $\log ax(x-b)$ を微分しましょう．
3. $\log x^n$ を微分しましょう．

[6] ネコの目のように変わる指導要領などは，科学を深く学び反映していないことを物語っています．なぜならば，正しいものであれば，変わるはずがないものです．ここで学んだことは，何百年立っても変わることがありません．子どもたちにも，普遍的原理を教えたいものです．指導要領よりも，まず個別科学の基礎を身につけることが教員養成の柱の一つです．それを基礎にして，指導要領や教育課程を批判的に検討してこそ，普遍的にしてかつ個性豊かな教育実践が生まれます．指導要領や教科書を金科玉条のように考えることは，教育の自主性を損ない，再び歴史に禍根を残すことにつながります．

[7] 技術の教科書では，機械 = 機械装置となっているために，このような発想を学校で植え付ける結果になっています．技術の教科書が，学問の歴史的発展として整理された機械工学の体系に沿って記述されれば，工学教育、生産の発展に寄与します．

4. $y = x^n$ の両辺の対数をとって，微分してみましょう．[8]

5. $y = x\sqrt{x+1}$ を微分しましょう．[9]

6. $y = e^x$ を微分しましょう．[10]

[8] 合成微分した後で，$y = x^n$ を再度代入すると式 (5.2.7) の結果が簡単に求められます．この方法を対数微分といいます．いろいろなところで強力な方法として利用できます．

[9] これも対数微分の応用です．

[10] 対数微分をとってから整理すると，$y' = e^x = y$ になります．指数関数も e で表すと微積分に伴い便利です．なお，計算機では，$e^{f(x)}$ を $\exp f(x)$ で表現します．

第6章　微分法の応用

6.1　いろいろな関数形の微分の方法

微分法を原則的に適用することが基本ですが，手際よく微分するためのバイパスも知っておくと便利です．

- $f(x)+g(x)$ の微分

  これは，いままでもやってきたことで新しいことではありません．

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \tag{6.1.1}$$

  が成立するので，複雑な計算でも各項ごとに微分できます．もし積があれば，前章の問題のように対数をとることで加算になり微分することもできます．具体的には，

$$\begin{aligned}(2x^3+4x+2)' &= (2x^3)'+(4x)'+2' \\ &= 6x^2+4 \qquad (6.1.2)\end{aligned}$$

  と処理します．

- $f(x)\cdot g(x)$ の微分

  $f(x)\cdot g(x)$ の形に関数を分けられれば，複雑な関数形も既知の単純な関数形の微分になります．

$$\begin{aligned}(f(x)\cdot g(x))' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[g(x+\Delta x)\left\{f(x+\Delta x)-f(x)\right\}+f(x)\left\{g(x+\Delta x)-g(x)\right\}\right] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

  以上の結果より，

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) \tag{6.1.3}$$

  が得られます．

- $f(x)\cdot g(x)^{-1}$ の微分

  $f(x)\cdot g(x)^{-1}$ の微分は，前記の結果を利用してみましょう．

$$\begin{aligned}\Big(f(x)\cdot g(x)^{-1}\Big)' &= f'\cdot g^{-1}+f\cdot\frac{d}{dx}(g^{-1})\\ &= f'\cdot g^{-1}+f\cdot\frac{dg}{dx}\frac{d}{dg}(g^{-1})\\ &= f'\cdot g^{-1}+f\cdot g'(-g^{-2})\end{aligned}$$

  この結果

$$(f(x)\cdot g(x)^{-1})' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^{-2}} \tag{6.1.4}$$

  が得られます．

問題

以下の関数を微分しましょう．どの方法を利用すれば，スマートに微分できるかを見つけるには，たくさんの演習を積むことが大切です．

1. $y = x^2\sin x$

2. $y = \tan x$

3. $y = \frac{x^2-1}{x}$

6.2　合成微分法

関数の中に関数が入り込んでいる場合は，合成微分の方法で解決できることがよくあります．この方法は，微分方程式を立てるときもよく利用されるので，身につけておくことが大切です．

$$z = g(f(x)) \tag{6.2.1}$$

このような関数形は

$$y = f(x), \qquad z = g(y) \tag{6.2.2}$$

と置き換えて考えます．微分の方法にこれを適用していきます．

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(y+\Delta y) - z(y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(y+\Delta y) - z(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(y+\Delta y) - z(y)}{\Delta y} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

この結果,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dy} \tag{6.2.4}$$

が得られます．

問題

以下の関数を微分しましょう．

1. $f(x) = \sqrt{\tan x}$

2. $f(x) = (x^2 - 1)^n$

3. $f(x) = \log(x^3 - 1)$

6.3 極大・極小

微分法の利用の一つは，極大値，極小値を見つけることです．ある現象が最大値や最小値を探すときにによく出くわします．関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続とします．図 6.1 に示すように，$f(x)$ は接線の傾き $f'(x)$ が正から負になるところで極大を示します．そして，極大値 $f(c)$ の所は $f'(c) = 0$ になります．同様にして極小値 $f(d)$ では，$f(x)$ は接線の傾き $f'(x)$ が負から正になります．このような特徴をよく理解して，現実の問題を解くときに利用できます．

問題

以下の微分の応用問題を解きましょう．[1]

[1]公式や方法を適用できずに問題を解けないことはありませんか．それには，二つの原因があります．

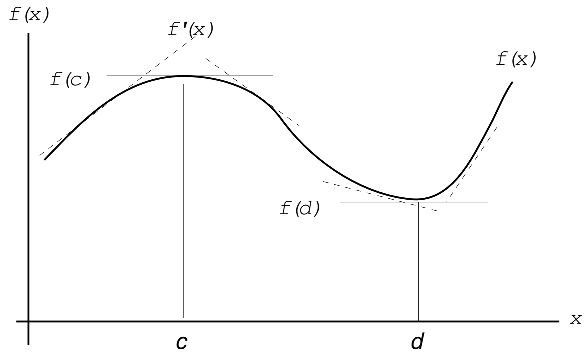


図 6.1: 極大，極小

1. 長さが $2a$ のひもで長方形を作ります．面積を最大にするには，どのようにすればよいですか．
2. 重力場で初速度 v_0 で投げるとき，到達距離 x の最大値はいくらですか．
3. 関数 $f(x)$ の $x = a_0$ 点における接線を求め，その接線と x 軸の交点 $x = a_1$ を求めましょう．[2]

6.4 Taylor 展開

ここでは，微分を利用して関数近似する方法を考えましょう．任意の関数 $f(x)$ を x の多項式で近似したと考え，以下の式のように仮定します．[3]

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \tag{6.4.1}$$

第一は，対象となる問題の中から本質的な数量の関係をしっかりと引き出していないことです．対象となる問題を十分に咀嚼し，消化する態度を身に付けましょう．試験のときに，問題を解くことや解けないことであせってばかりいないで，じっくりと集中することが必要です.「苦手」,「嫌い」,「面倒」などと言っていると，自ら対象の問題に集中できない結果を作ってしまいます．

第二は，公式や方法を深く理解していないことが，原因になることもよく見られます．公式は憶えているのに使えないときがありませんか．答えを見たらわかるけれど，いざ試験になると全く手をつけられないのが，このパターンです．公式を深く理解すると，対象の問題の解決の糸口が自然に見えてきます．

「よく問題が解ける」優秀な人がいますが，その人はたくさんの問題を解いています．学生諸君も，食わず嫌いや苦手意識を払拭して，問題を解いてみてください．そして，問題を解くのが楽しくなったときに，不思議に力が付いているものです．どんな人でも，そのようにして能力を高め，学ぶ喜びを味わえるはずです．

[2] これを繰り返して a_i を求めると関数 $f(x)$ が x 軸に交わる点 $f(x) = 0$，すなわち方程式 $f(x) = 0$ の解を得ることができます．この方法をニュートンの方法といいます．

[3] $(x-a)$ の多項式で近似しているところが，巧妙なアイデアであることが後でわかります．

この式が $x = a$ で一致するとすると $(x - a)$ の項はすべて消去されるので

$$a_0 = f(a) \tag{6.4.2}$$

となります．次に式 (6.4.1) を 1 階微分して，

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2(x - a) + \ldots + n \cdot a_n(x - a)^{n-1} + \ldots \tag{6.4.3}$$

この式が $x = a$ で一致するとすると同様にして，

$$a_1 = f'(a) \tag{6.4.4}$$

が得られます．さらに，式 (6.4.1) を 2 階微分して，

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + \ldots + n(n - 1) \cdot a_n(x - a)^{n-2} + \ldots \tag{6.4.5}$$

この式が $x = a$ で一致するとすると同様にして，

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2 \cdot 1} \tag{6.4.6}$$

が得られます．式 (6.4.1) を 3 階微分して，[4]

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \ldots + n(n - 1)(n - 2) \cdot a_n(x - a)^{n-3} + \ldots \tag{6.4.7}$$

この式が $x = a$ で一致するとすると同様にして，

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \tag{6.4.8}$$

になります．n 階微分まで繰り返すことにより，[5]

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{6.4.9}$$

となります．

---

[4]関数 $f(x)$ の n 階微分を

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x)$$

と表します．1 階微分は，$f'(x) = f^{(1)}$ になります．

[5]$n!$ は

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \ldots 1$$

を意味する記号です．$n!$ は n の階乗といいます．

以上の結果をまとめると

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \tag{6.4.10}$$

が得られました．このように，関数を微分を係数にした多項式で展開することを Taylor 展開といいます．

いま，式 (6.4.10) において，$a = 0$ に置き換えたものは

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{6.4.11}$$

となり，これを Maclaurin 展開といいます．

問題

マクローリン展開を利用して，以下の関数を級数展開しましょう．

1. $\sin x$

2. $\cos x$

3. e^x

以上を比較するとオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ も明確にわかります．ぜひ，試してください．

6.5　偏微分

6.5.1　偏微分の定義

関数や対象になる物理現象が，一つの独立変数で決まっているわけではありません．たとえば，平面 z は x, y で求められます．図 6.2 のように，ある時間の物体の温度 T も位置 (x, y) によって異なります．そのような場合は，

$$T = f(x, y) \tag{6.5.1}$$

の関数形で表されます．

このように複数の変数で表現される関数の微分をする場合は，各変数ごとに微分することになります．そして，微分に関係しない変数は定数とみなします．具体例を見ながら，偏微

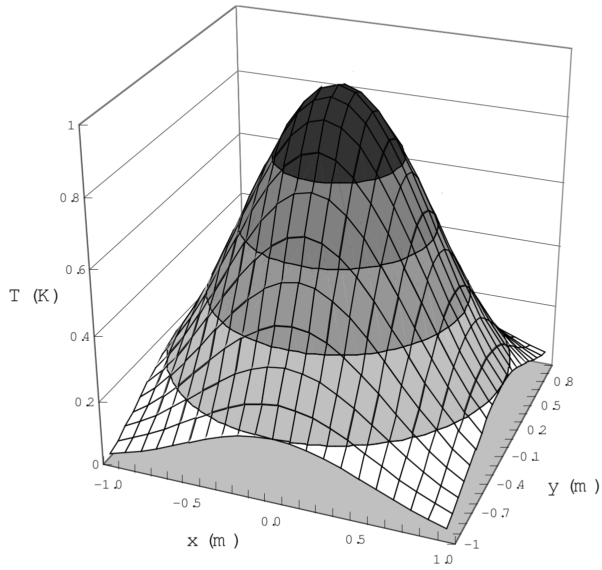


図 6.2: 温度分布

分の記号と取り扱いに慣れましょう．

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 3xy + y^2 \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + 3y \\
f(x) &= x^2 + 3xy + y^2 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3x + y^2
\end{aligned}$$

偏微分を正式に定義すれば，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{6.5.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{6.5.3}$$

となります．微分の定義と基本は同じですから，微分に慣れている諸君であれば，難なく飲み込めますね．

たとえば，微小領域での温度の変化 dT は，

$$dT = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{6.5.4}$$

で表し，これを全微分といいます．力の釣り合いの微分方程式（運動方程式）を作るときによく利用しますから，全微分を記憶しておいてください．

問題

以下の関数を x, y で偏微分しましょう．

1. $z = x^2 + y^2$
2. $z = x^2 - 3xy^2 + y^2$
3. $z = \frac{1}{xy}$

6.5.2　最小自乗法

偏微分を学びました．偏微分が工学の強力な方法として活用される例を通して，偏微分のすばらしさを実感しましょう．ここでは，偏微分が利用される例として，最小自乗法を学びます．

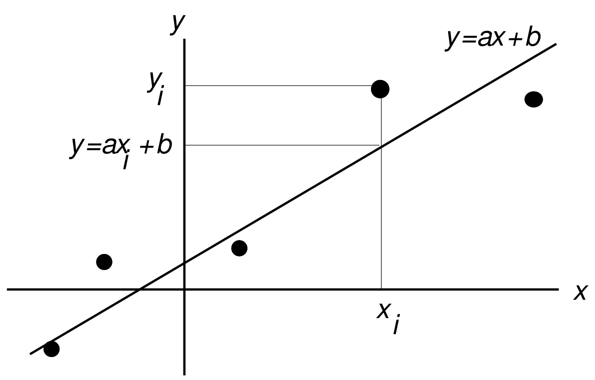


図 6.3: 回帰直線

図 6.3 に示すように，たくさんのデータ点があるとします．これらのデータ点から x と y の直線関係を予測するために，直線近似を行います．近似された直線は，データとの誤差が最小であるはずです．

i 番目のデータ (x_i, y_i) と直線 $y = ax + b$ の誤差 R_i は，

$$R_i = \{y_i - y(x_i)\}^2 = (y_i - ax_i - b)^2 \tag{6.5.5}$$

になります．誤差を正で表すために自乗しています．すべてのデータの総和をとると誤差 R は

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2ax_iy_i + a^2x_i^2 + 2abx_i + b^2 - 2by_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}y_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + a^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2ab\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}b^2 - 2b\sum_{i=1}^{n}y_i \\
R &= \sum_{i=1}^{n}y_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + a^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2ab\sum_{i=1}^{n}x_i + nb^2 - 2b\sum_{i=1}^{n}y_i \qquad (6.5.6)
\end{aligned}
$$

少し複雑な式になってきましたが，落ち着いて考えてみると，誤差関数 R は a と b の関数になり，各項の総和は数値でしかありません．ゆえに，以下のように置き換えます．

$$R(a,b) = C_0 + C_1a + C_2a^2 + C_3ab + C_4b^2 + C_5b \qquad (6.5.7)$$

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \sum_{i=1}^{n}y_i^2 \\
C_1 &= -2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\
C_2 &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \\
C_3 &= 2\sum_{i=1}^{n}x_i \\
C_4 &= n \\
C_5 &= -2\sum_{i=1}^{n}y_i
\end{aligned}
$$

次は，データとの誤差が最も少なくなるための直線の傾き a と b を決定することです．それは，誤差関数 R が最も小さくなる a と b を見つけることです．前述した関数 R の極小を求める問題に帰着できます．この場合，a と b の 2 変数ですから偏微分の連立方程式になり，

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 0 \qquad (6.5.8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = 0 \qquad (6.5.9)$$

で表現できます．式 (6.5.7) を偏微分して，これらを具体的に記述すると

$$C_1 + 2C_2a + C_3b = 0 \qquad (6.5.10)$$

$$C_3a + 2C_4b + C_5 = 0 \qquad (6.5.11)$$

になります．この連立方程式を解くと

$$a = \frac{2C_1C_4 - C_3C_5}{C_3^2 - 4C_2C_4}$$

$$b = \frac{2C_2C_5 - C_1C_3}{C_3^2 - 4C_2C_4} \tag{6.5.12}$$

が得られ，これらの a, b が近似直線を与えます．[6]

問題

案ずるより産むが易し，実際に自分でやってみましょう．(0,0), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3) をデータ点として，前述の方法で曲線回帰した直線を求め，その直線をグラフに示しましょう．

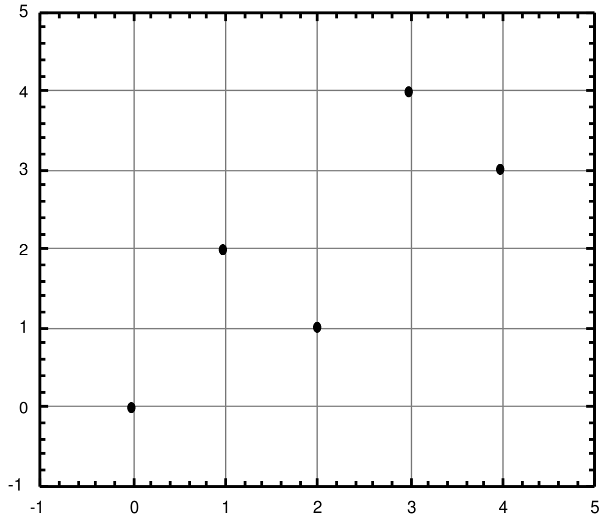


図 6.4: 回帰直線

[6] このようにして得られた直線を回帰直線ともいい，最小自乗法で直線近似することを直線回帰するといいます．

ここで示した方法は，直線による a, b の 2 変数ですが，放物線をはじめ他の関数形でも同様な手法で，関数近似できます．実験，卒業研究などのデータ整理にとても役立ちます．最近は，関数近似はコンピュータのアプリケーションに組み込まれて直接プログラミングすることは少なくなっていますが，ここで述べたような原理で処理していることをよく理解することも大切です．

第7章　積分

7.1　微分から積分へ

この章に至るまでにいろいろな苦労があったことと思います．しかし，数のはじまり，数量の概念の広がりを学び，その数量の変化から関数や微分法へと学習してきました．それまでの力学の歴史とその意義も以前より深まったのではないでしょうか．

この章では，微分をもとに積分を再び扱います．かつての積分は定積分的な考え方を基礎にして，細かく分けて総和する概念および関数の面積として学びました．ここでは，微分の逆演算としての積分を考えます．つまり，関数 $f(x)$ が与えられたときに

$$F'(x) = f(x) \tag{7.1.1}$$

を満たす $F(x)$ を見つけ出す意味での積分です．

物理現象は微分で表現すると単純な形式で力の釣り合いの方程式（運動方程式）$f(x)$ を作ることができます．この微分形の式を $f(x)$ 積分して $F(x)$ を得ることで問題が解けます．これが，積分が必要になる理由です．積分を学ばないと，力の程式が解けません．端的に言えば，工学問題とはモデルを創造し，その微分方程式を導き，解くことです．そのためには，どうしても積分を必要とします．

また，ここで一般化した積分を身につければ，以前の章で行った積分の方法（直感に基づくやっかいな総和）に悩まされることなく，手際よく積分をすることができます．

7.2　不定積分

関数 $f(x)$ が与えられたときに

$$F'(x) = f(x) \tag{7.2.1}$$

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数または不定積分といいます．関数 $f(x)$ を積分すると

$$\int f(x)dx = F(x) \tag{7.2.2}$$

なります．このように見ると積分することは，$f(x)$ の原始関数を見つけることになります．

さて，一つの原始関数について $F'(x) = f(x)$ が成立するとすると，

$$(F(x) + C)' = f(x) \tag{7.2.3}$$

も成立するので，任意の不定積分は

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{7.2.4}$$

になります．定積分の場合は，$\int$ の下と上に原始関数の区間を表す記号が付いていましたが，不定積分ではそれが付かない代わりに，積分定数 C が付きます．

さて，これまでの微分の成果をもとにして，各関数の原始関数を見てみましょう．[1]

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (n \neq -1) \tag{7.2.5}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \log x \tag{7.2.6}$$

$$\int \cos x dx = \sin x \tag{7.2.7}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \tag{7.2.8}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x \tag{7.2.9}$$

$$\int e^x dx = e^x \tag{7.2.10}$$

これらの関係をまとめると表 7.1 になります．原始関数を求めるには，たくさんの微分を解くことが大切です．

この表をみてもわかるように単純な形式の関数であっても，その原始関数は複雑で，用意に求められない場合も多いのです．微分のように接線の傾きを求める場合は，簡単に導関数が求められます．これまで，単純に面積を求める，体積を求めることで原始関数を導いてきましたが，その関数の面積とは何か，体積とは何かを考えることが必要です．積分は何を求めているかをよく考えないと，原始関数の存在や求め方に問題が生じることがあります．た

[1]原始関数を求めるときに，x の区間が問題になるときがあるので，注意しましょう．

とえば，加速度を積分することで速度，位置が得られます．しかし，位置をさらに時間で積分することがどのような物理量を求めるのかを考えなければなりません．公式的積分から徐々に，対象とする問題の物理学的意味を含めて解を探すことがこれからは必要です．

問題

以下の関数を x について積分しましょう．[2]

1. $3x^3 - x^2 + 3$
2. $\frac{1}{x+1}$
3. $\sin 2x$
4. $e^{x/T}$

7.3　積分の方法

7.3.1　置換積分法

被積分関数 $f(g(x))$ が複雑な形をしているとき，直感的に原始関数が求められない場合も多いものです．そのときは，合成微分と同様の方法を積分においても適用することで解決する場合もあります．

具体例を解いて，学んでみます．

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ? \tag{7.3.1}$$

ここで，$x = \sin\theta$ とおいて計算する方法を考えます．

$$x = \sin\theta \tag{7.3.2}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta \tag{7.3.3}$$

$$dx = \cos\theta d\theta \tag{7.3.4}$$

一方，積分区間を考えると

$$x = -1 \qquad \theta = -\frac{1}{2}\pi \tag{7.3.5}$$

[2] 積分を解くことで微分がどのくらい身に付いているかを再認識することができます．これは，乗算がしっかりできていれば，除算もすんなりわかることと同じです．積分を解くことで，微分の学習も深まります．

$$x = 1 \qquad \theta = \frac{1}{2}\pi \tag{7.3.6}$$

これらの結果を式 (7.3.1) に代入して

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2}} \cos\theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= [\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

が得られました．このように被積分関数を別な関数で置き換えて簡略化して積分する方法を置換積分といいます．複雑な被積分関数を既知の積分に変換できます．たくさんの問題を自分で解いてみることが，この方法を身につける一番の近道です．

問題

以下の積分を置換積分法で解いてみましょう． [3]

1. $\int (x^3+1)3x^2dx$
2. $\int \sin^2\theta \cos\theta d\theta$

7.3.2　部分積分法

被積分関数が複数の関数の積になっている場合は，部分積分法を利用して積分ができる場合があります．式 (6.1.3) で得られた関係をみると

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \tag{7.3.8}$$

$$f'(x)\cdot g(x) = \frac{d}{x}\left(f(x)\cdot g(x)\right) - f(x)\cdot g'(x) \tag{7.3.9}$$

上式を積分すると

$$\int f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx \tag{7.3.10}$$

が得られます．これを部分積分といいます．

この関係は，

$$\int g\frac{df}{dx}dx \quad = \quad fg - \int f\frac{d}{xg}dx \tag{7.3.11}$$

[3] ヒント　$u = x^3+1$, $t = \sin\theta$ と置き換えると？

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}dx &= df \quad (7.3.12) \\ \frac{d}{xg}dx &= dg \quad (7.3.13) \end{aligned}$$

と置いて

$$\int gdf = fg - \int fdg \quad (7.3.14)$$

と簡略化して考えることもできます．

例題で学んでみましょう．[4]

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \quad (7.3.15) \\ &= xe^x - e^x = (x-1)e^x \quad (7.3.16) \end{aligned}$$

問題

以下の積分を部分積分法を用いて解いてみましょう．[5]

1. $\int \log x dx$
2. $\int \sin xe^x dx$

7.4　積分の応用

7.4.1　体積

[6]

数学的取り扱いが中心になっていましたが，ここではこれまでの成果を利用して具体的な問題を解きます．積分で最もわかりやすい概念が面積や体積です．面積はかなりやりましたから，ここでは体積を求めることにします．

[4] $f'(x) = (e^x)' = e^x$, $g(x) = x$ と考えます．

[5] 1. $g = \log x$, $f = x$, 2. 部分積分を繰り返すことで答えが見えてきます．

[6] 体積の他に曲線の長さ s を求める問題も興味深い．

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

から

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)} dx$$

により曲線の長さを求めることができます．

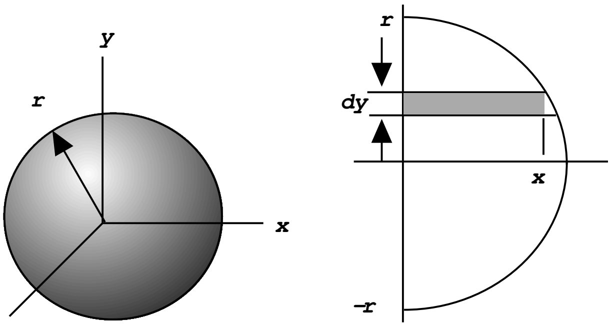


図 7.1: 球の体積

図 7.1 に半径 r の球を示しました．y の所の半径 x は，円の方程式

$$y^2 + x^2 = r^2 \tag{7.4.1}$$

の関係から

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} \tag{7.4.2}$$

となります．厚さ dy の体積 dV は

$$dV = \pi x^2 dy = \pi(r^2 - y^2)dy \tag{7.4.3}$$

です．これを球の下から上まで積分することにより体積 V が得られます．

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} dV = \int_{-r} r\pi(r^2 - y^2)dy && (7.4.4) \\ &= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - y^2)dy && (7.4.5) \\ &= \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \pi \left[r^3 + \frac{r^3}{3} \right] && (7.4.6) \\ V &= \frac{4}{3}\pi r^3 && (7.4.7) \end{aligned}$$

このようにして，はじめて球の体積が求められます．暗記した結果も実際に導いてはじめて，科学的根拠に裏付けられます．いまは，学問に裏付けられた自己の知識になったわけです．

今度は，円すいの体積を求めてみましょう．円すいの体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\text{底面積 } S_0 \times \text{高さ } h \tag{7.4.8}$$

と教わってきましたが，数学的な証明はしないままだってのではないでしょうか．微積分を習うことで証明できますので，実際にやってみましょう．

図 7.2 に示す円すいの底面積 S_0 は，高さの半分の所では，４分の１に減ってしまいます．高さ x の所の底面積を $S(x)$ とすると

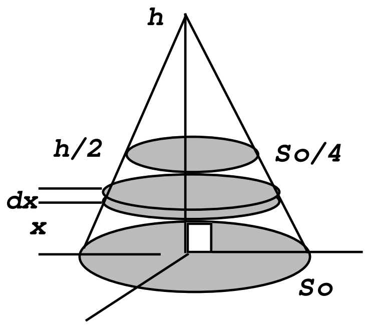


図 7.2: 円すいの体積

$$S(x) = (1 - \frac{x}{h})^2 S_0 \tag{7.4.9}$$

で表すことができます．ゆえに，円すいの体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^h S_0(1 - \frac{x}{h})^2 dx && (7.4.10)\\
&= S_0 \int_0^h (1 - 2\frac{x}{h} + \frac{x^2}{h^2}) dx && (7.4.11)\\
&= S_0 \left[x - \frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{3h^2} \right]_0^h && (7.4.12)\\
&= S_0 \left[h - h + \frac{h}{3} \right] && (7.4.13)\\
V &= \frac{1}{3} S_0 h && (7.4.14)
\end{aligned}$$

このようにして円すいの体積も証明できました．底面積は任意の形状でもよいので，四角すい，三角すいでもかまいません．どんな形状のすいでも，その形状の柱の三分の一になります．

7.4.2 積分と仕事

エネルギー

エネルギーという言葉は，力と同じように日常的によく利用される言葉です．しかし，そもそもは物理量を表す専門用語です．

まず，図 7.3 に示すポテンシャルエネルギーについて考えます．時間や速度によらず，質点の位置 x だけで決まる力 $F(x)$ を保存力と言います．たとえば，バネの及ぼす力 F は，バネの自由位置からの距離 x だけで決まり，$F = -kx$ になります．また，重力も保存力になります．

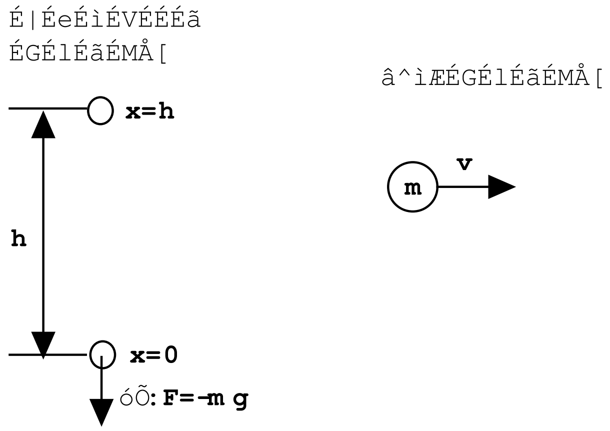


図 7.3: ポテンシャルエネルギーと運動エネルギー

位置 x のみの関数であれば，x でその力を積分してマイナスをつけたもの，

$$U = -\int F(x)dx \tag{7.4.15}$$

を得ることができます．この $U(x)$ をポテンシャルエネルギーまたはポテンシャルといいます．この関係からポテンシャルを位置 x で微分することにより，保存力を得ることができます．

図 7.3 の $x = 0$ から $x = h$ までのポテンシャルエネルギーを求めることを考えます．地表近くでは，重力の変化は小さく一定と仮定すると，

$$U = -\int_0^h F(x)dx = -\int_0^h -mgdx = mg[x]_0^h = mgh \tag{7.4.16}$$

になります．

一方，図 7.3 に示される運動のエネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{7.4.17}$$

で与えられます．

そもそもエネルギーは，仕事と同じです．力学で言う仕事 T とは，力 F の方向へどれだけ位置を変化させたかで定義されます．位置の変化を ds とすると，仕事は

$$T = \int F ds \tag{7.4.18}$$

となります．ここで，微小時間 dt 間の位置の変化 ds を速度 v で表すと

$$ds = vdt \tag{7.4.19}$$

となるので，式 (7.4.18) は

$$T = \int Fvdt = \int m\frac{dv}{dt}vdt = m\int vdv = \frac{1}{2}mv^2 \tag{7.4.20}$$

となり，式 (7.4.17) と一致します．

7.4.3　脱出速度

運動エネルギー，仕事およびポテンシャルの物理的概念と数学的取り扱いが，これで完了しました．次は，ロケットで宇宙に飛び出すための条件としての脱出速度を考えます．脱出速度は，力学と積分のきれいな接点が味わえる問題です．

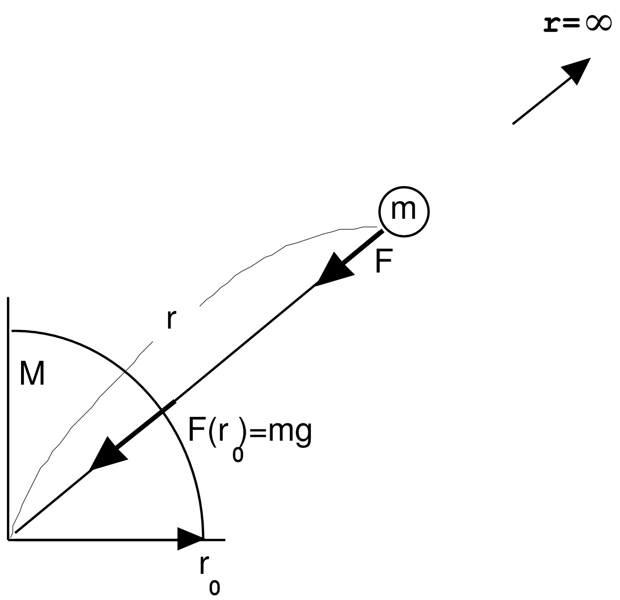


図 7.4: 重力の届かない彼方までの仕事

図 7.4 を見ながら，質量 m の物体が地球からの重力を振り切って宇宙の彼方へ飛び出す条件を考えましょう．ニュートンの万有引力の法則に従い地球からの距離 r にある物体の重

力 F は

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{7.4.21}$$

となります．ただし，M は地球の質量，G は重力定数です．重力 $F(r)$ に逆らい，この物体を地表 r_0 から宇宙の彼方 $r = \infty$ まで引張って行く仕事 U は

$$\begin{aligned} U &= -\int_{r_0}^{\infty} F(r)dr \\ &= -\int_{r_0}^{\infty} G\frac{-mM}{r^2}dr \\ &= GmM\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2} \\ &= GmM\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_0}^{\infty} \\ U &= GmM\frac{1}{r_0} \end{aligned} \tag{7.4.22}$$

となります．

さて，地表での重力 mg の関係と式 (7.4.21) から

$$mg = GmM\frac{1}{r_0^2} \tag{7.4.23}$$

$$GM = gr_0^2 \tag{7.4.24}$$

この結果より，

$$U = mgr_0 \tag{7.4.25}$$

が得られます．

この仕事量 U よりも大きい運動エネルギーを与えれば，この物体は地球の重力を振り切って宇宙に飛び出せます．つまり，

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \geq U = mgr_0 \tag{7.4.26}$$

$$v = \sqrt{2gr_0} \tag{7.4.27}$$

となります．この関係に地球の半径 r_0 =6371 km, $g = 9.8$m/sec^2 を代入すると，$v = 11.2$ km/sec となり，秒速 11.2 km を越える速度を物体に与えるならば，地球を飛び出せます．

問題

地球にはすばらしいことに大気があり，水があります．しかし，月には大気がありません．さて，月に大気がないのはなぜでしょうか．そのメカニズムを考えてみましょう．

表 7.1: 原始関数とその導関数

$f(x) = F'(x)$	導関数	$F(x)$ 原始関数
x^a	$(a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$(x \neq 0)$	$\log\|x\|$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\arctan x$
$\frac{1}{1-x^2}$	$(x \neq \pm 1)$	$\frac{1}{2}\log\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|$
$\frac{1}{x^2-1}$	$(x \neq \pm 1)$	$\frac{1}{2}\log\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\|x\| < 1)$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(\|x\| > 1)$	$\log\|x + \sqrt{x^2-1}\|$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\|x\| > 1)$	$\log(x + \sqrt{x^2+1})$
$\sqrt{1-x^2}$	$\|x\| \leq 1$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$
$\sqrt{x^2-1}$	$\|x\| \geq 1$	$\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \log\|x + \sqrt{x^2-1}\|)$
$\sqrt{x^2+1}$		$\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \log\|x + \sqrt{x^2+1}\|)$
e^x		e^x
a^x	$(a > 0,\ a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\log a}$
$\sin x$		$-\cos x$
$\cos x$		$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$-\cot x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$-\tan x$
$\tan x$		$-\log\|\cos x\|$
$\cot x$		$\log\|\sin x\|$

第8章　力

機械の学習の基本は力学 (mechanics) です．ものを作るために必要な力学を体系化したものが，機械工学 (mechanical engineering) です．なぜ，これほど力というものにこだわりをもたなければならないかは，機械 1 で学習しましたが，ここで再び考えましょう．

すべてのものは力によって運動し，力という単位で考えることにより，時間と共に物体がどのように運動しているかがわかります．ゆえに，ほとんどの方程式は，力という物理量の上で導き出されます．人権というもので，法律や社会をみるとどうあるべきかがわかります．人権を理解しない人には，人間的社会のシステムを構築することはできません．「社会における人権」と同じように，「自然界における力」を知らない人には，自然を理解することはできません．

ニュートン以前は，この力という物理量がわからなかったために物体の運動を知ることができませんでした．ニュートン以後は，力という物理量がわかったために，太陽や月，地球などの広大な宇宙の運動を表現することができます．そして，電子や原子のミクロの運動も力で表現することができます．

力を学ぶことがとても大切なことであることを深く認識して，力を学習することが，教える側も学ぶ側も必要です．この章では，「力」の正確な定義と取り扱いを学びます．

8.1　位置，速度，加速度

図 8.1 は，物体が下向きに運動しています．その時間 t と位置 x について考えます．まず，物体の位置と時間の関係を図示すると図の右上のグラフができます．たとえば，時間 t のとき物体の位置が x にあります．そして，微小な時間 dt の間に物体の位置が x から $x+dx$ になるとします．そのときの速度 v(velocity) は，

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{8.1.1}$$

で表します．物体に力が加わっていない場合（抵抗もない場合），この物体の速度 v は，変わらず等速運動します．[1]

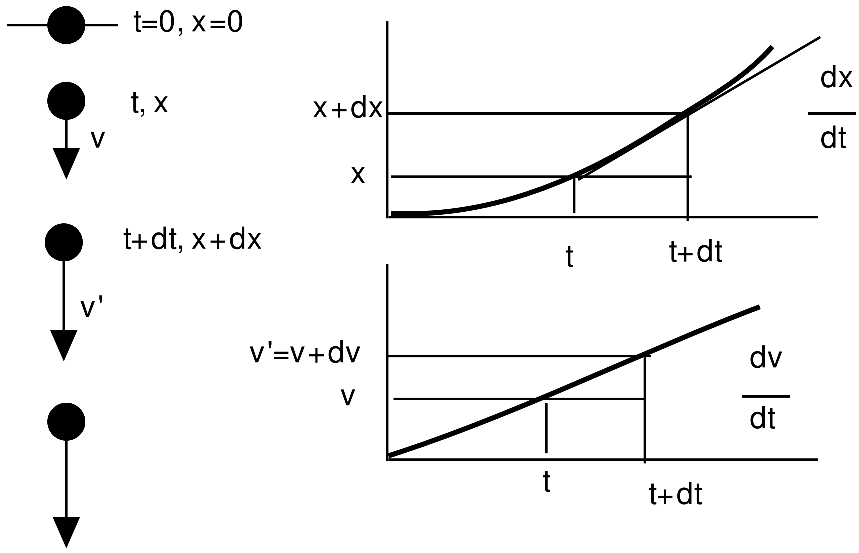


図 8.1: 微小時間における位置，速度の変化

このようにして速度 v と時間 t のグラフを描くと，図 8.1 の右下のグラフになります．時間 t から dt の間に速度が v から v' に変化しています．時間に対する速度の変化を加速度 a (acceleration) といいます．速度関係は

$$v' = v + dv \tag{8.1.2}$$

なので，加速度 a は

$$a = \frac{v' - v}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{8.1.3}$$

と表します．加速度という言葉はよく耳にするのですが，数学的な表現は上の式のようになります．まずは，速度の変化率と考えておきましょう．

8.2 力の定義と単位

加速度を学んだら，次に考えなければならないことは，なぜ速度が変化するかです．何が作用して速度が変化するのでしょう．速度に変化を生ずる原因は，力が働いているからです．

[1]物体の方向や速度が変化するためには力が必要です．逆の言い方をすれば，力が作用して方向や速度が変化します．

図 8.2 を見てください．力がない場合は，物体は等速運動となります．[2]しかし，力が働いている場合は加速度運動をします．[3]

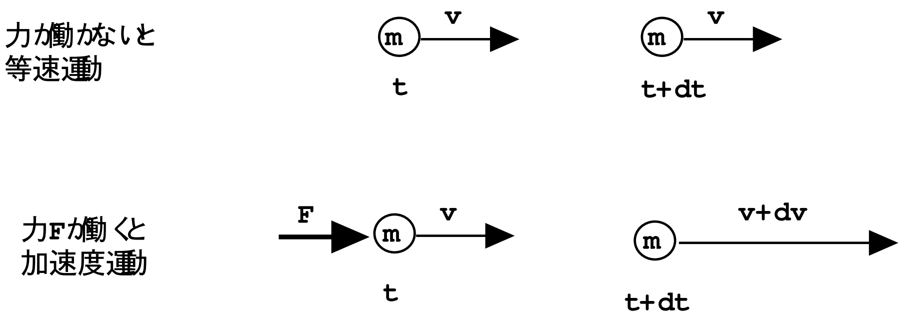


図 8.2: 力と速度の変化

さて，その力 F (force) は，

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{質量} \times \text{加速度} \tag{8.2.1}$$

で定義されます．[4]味も素っ気もないとは思わないでください．空気や水も味も素っ気もないものですが，いかに大切で役に立つものであるかを知るのは，それが欠乏したときか，学習により生きるメカニズムを知ったときです．力がいかに大切かは，より学習を進めていけば行くほど，ひしひしと感じてきます．この場ですぐに，役に立たないと判断してはいけません．

これまで出てきた単位を表 8.1 にまとめました．この単位については，しっかりと身につけてください．考え方，式の変形ミスは，まず単位のチェックで判断できます．単位をあいまいに憶えてしまうと，学ぶことが苦しくなってきます．

問題

1. 1sec の間に 10m/sec ずつ速度が上がっている場合の加速度 a はいくらですか．
2. 速度 10m/sec で走っている体重 60kg の人を毎秒 2m/sec ずつ減速させるのに必要な力 F はいくらか．

[2]静止している場合も等速運動といえます．

[3]加速度運動は，図に示したような増速だけでなく，減速などの場合もあります．

[4]この力の定義と意味は，生涯を通じ忘れないようにお願いします．なぜならば，近代科学の第一歩としての教養ですから．つまり，大学で学んだことの大切な証です．

表 8.1: 単位

長さ x	m(メートル) , cm (センチメートル), mm (ミリメートル)
時間 t	sec(秒)
質量 m	kg(キログラム), g (グラム)
速度 v	m/sec (メートル毎秒)
加速度 a	m/sec^2 (メートル平方毎秒)
力 F	N(ニュートン) = kgm/sec^2

3. 質量 18000kg の機体 A を 20 m/sec^2 の加速度で推進するエンジン X と質量 1000kg の機体 A を 30 m/sec^2 の加速度で推進するエンジン Y のそれぞれの推力 F_X, F_Y を求めましょう．また，どちらのエンジンの推力が大きいですか．

4. 質量 20kg の球を毎秒 10m/sec ずつ増速できる性能のエンジンがある．静止していた 10kg の球が，20sec 後に空気抵抗と推力が釣り合い，一定速度で航行している．この場合の空気抵抗 F_D はいくらですか．

8.3　力の成分分解

力はベクトルです．ベクトル (vector) という言葉は，ばじめて聞きましたか．方向と大きさをもった量がベクトルです．速度，加速度もベクトル量です．これまで習った体積，面積，温度，質量，貨幣 ... は，すべてスカラー量 (scalar) と言われるものです．スカラー量は，大きさのみしかありません[5]．ベクトルは，方向をもっているので座標の取り方により，成分が変わります．

図 8.3 の左の力 F は，ベクトルですから x 軸，y 軸成分に分解できます．しかし，座標軸が回転して傾いてしまうと，その成分 F_x, F_y の値は変化します．これが，ベクトル量の扱いの本質的特徴です[6]．

早速，成分 F_x, F_y の値を求めてみましょう．力 F を成分分解するには，cos, sin を利用し

[5] スカラー，ベクトルの他にテンソル (tensor) という量もあります．後章で学ぶ応力やひずみは二階のテンソルです．スカラーは 0 階のテンソル，ベクトルは 1 階のテンソルという考え方もできます．大学生として，量という概念も広く，深く拡張して，質を高めることが必要です．

[6] これをむずかしさと感じると，嫌になってしまいます．

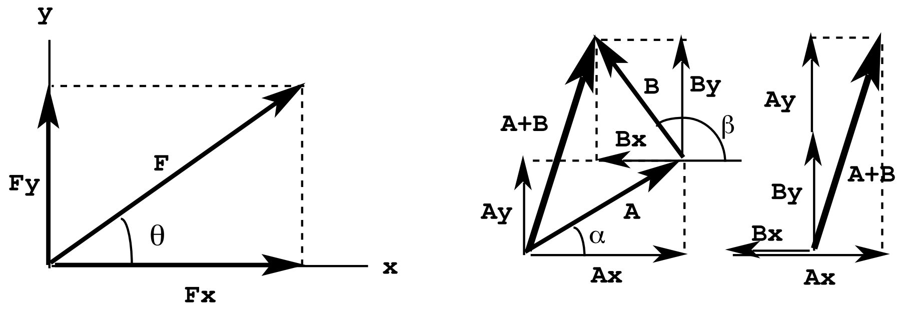


図 8.3: ベクトルとしての力，成分分解

ます．三角関数の定義をよく理解していれば，

$$F_x = F\cos\theta \tag{8.3.1}$$

$$F_y = F\sin\theta \tag{8.3.2}$$

になることに気付きます．座標軸と F の向きが変われば，θ の値も変わるので，成分 F_x, F_y が変化することが式 (8.3.1), 8.3.2) からわかります．

力はベクトルですから，それらの加法についても，成分ごとに計算しても同じ結果になることがわかります．たとえば，図 8.3 の右図をみてください．ベクトル A, B を個々の成分に分解して加法を適用しても，それぞれを加えてベクトル $A+B$ から成分を求めても同じ結果になります．

力の釣り合い方程式などを求める場合は，いまのように各座標軸の成分にして，それぞれ方程式を立てる場合が多いので，この方法に熟知しておくことが大切です．

問題

1. 図 8.3 の右図の $A+B$ の x 軸方向の力 F_x を求めましょう．
2. 図 8.3 の右図の $A+B$ の y 軸方向の力 F_y を求めましょう．
3. 図 8.4 のように傾き θ の斜面に質量 m の物体があります．
    - 斜面に垂直な力の成分 N はいくらですか．
    - 斜面に垂直な力の成分 T はいくらですか．
    - 摩擦係数を μ とするとき，この物体に生じる摩擦力 F はいくらですか．
    - 傾き θ がいくらの時，この物体は滑り出しますか．

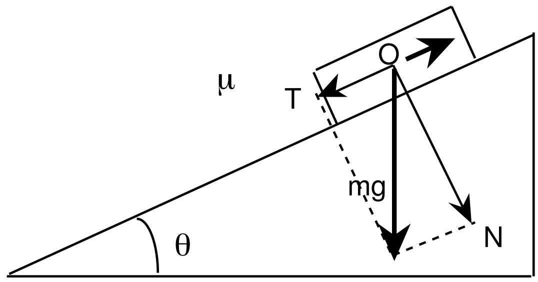


図 8.4: 斜面にある物体

8.4　力のつり合いと運動方程式

力がベクトルであり，それらを座標を用いて成分に表すことも前節で学びました．工学，機械学の現象で多いのは，つり合っている状態です．つまり，多数の力が要素に加わりますが，それが静的な状態にある場合です．据え付けたものは動かず，力が加わっても固定されていればその反力により，物体が静止状態，平衡状態を保っていてほしいことがよくあります．

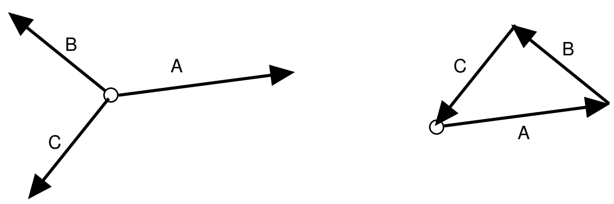


図 8.5: 力のつり合い

さて，つり合っているということは，力学的に厳密にいえば，力の総和が零ということです．図 8.5 にある力 A, B, C がつり合っています．その場合，右側のように力 A, B, C を移動すると，必ず合力 F は

$$F = A + B + C = 0 \tag{8.4.1}$$

となります．これを一般化して成分で表現すると，

$$F_x = \sum_{i}^{n} F_x^i \tag{8.4.2}$$

$$F_y = \sum_{i}^{n} F_y^i \tag{8.4.3}$$

となります．ただし，これは二次元での表現です．三次元であれば z 軸が加わります．

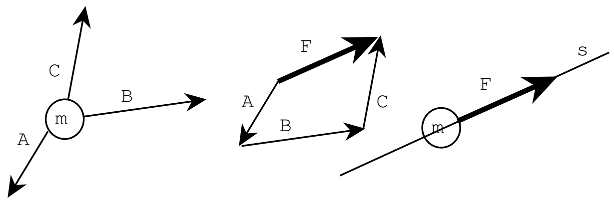


図 8.6: 不つり合い力は物体に作用し，加速度運動を起こす

もし，合力 F がゼロでない場合はどうなるでしょう．図 8.6 に示すように，不つり合い力 F は，物体に作用して加速度 a を起こさせます．つまり，

$$ma = m\frac{d^2s}{dt^2} = F \tag{8.4.4}$$

の運動が生じます．

問題

1. 図 8.7 (a) において，各力を表示して，荷物を持ち上げるための力 F を求めましょう．
2. 図 8.7 (b) のようにに棒の先端にワイヤー x, y を結んで荷物を支えています．棒にかかる軸力 F，ワイヤー x にかかる張力 T を求めましょう．
3. 図 8.7 (c) のロープ a は，材料も長さも同じです．ロープ a の破断荷重が 141.4N とすると，ロープ a を切断するための力 F を求めましょう．
4. 図 8.8 の右図はバネの様子を示しています[7]．バネの自由長からの変位 x とバネの力 F には，

$$F = kx \tag{8.4.5}$$

の関係があります．この k をバネ定数といいます．いま右図のようにバネを構成すると，右端が u 変位すると，それぞれのバネの伸びはどうなりますか．また，$k = 20\text{N/cm}$, $u = 6\text{cm}$ の時のバネの右端の力 F を求めましょう．

[7]バネの力学を研究した人は，イギリス人のロバート・フック (1635∼1703) です．彼は，ニュートンの論敵として，力学史に多くの物語を残しました．ニュートンの偉大な業績の屈折について論争をしています．また，ニュートンに万有引力の多くの示唆を与えています．フックの示唆する距離の二乗に反比例する力および楕円軌道はニュートンの研究と学問の集大成に大いに役立っています．しかし，それも度を超すと精神の消耗にもなります．

フックの研究したバネのように変形と力が比例する（線形）性質を弾性といいます．後ろの章では，この弾性にもとづいて，材料の強度を学ぶ予定です．

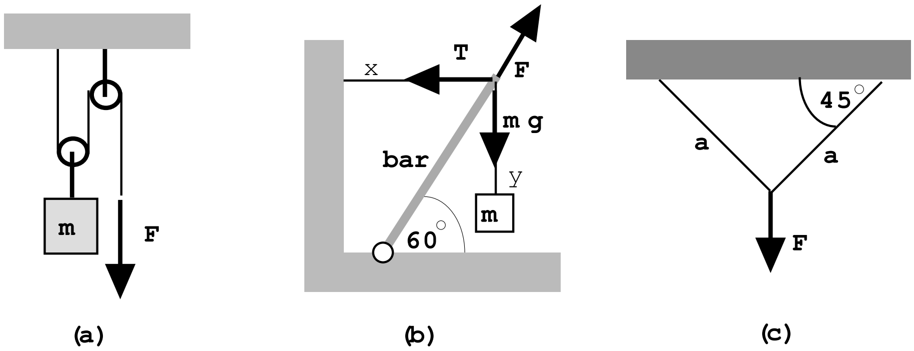


図 8.7: 力のつり合いの問題

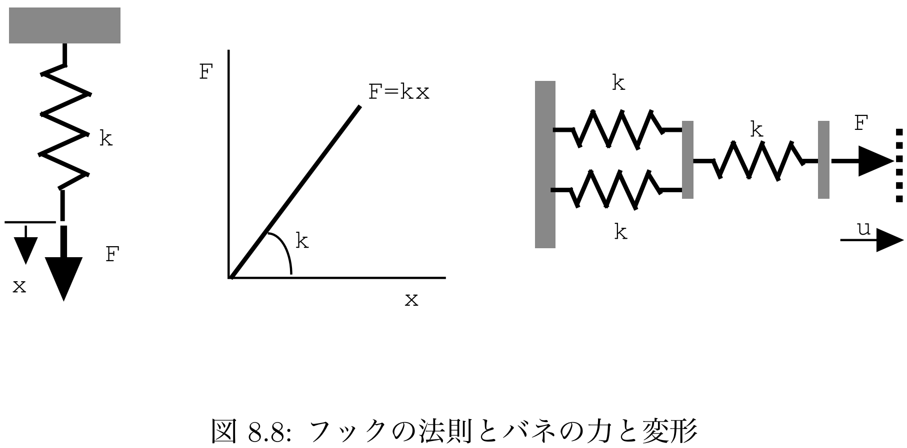


図 8.8: フックの法則とバネの力と変形

第9章　モーメント

9.1　曲げと回転，てこの原理

力のことについて学びましたが，力の他に大切なものもあります．それは，モーメント(moment) というものです．物体が静止しているためには，力がつり合っているだけでなく，モーメントがつり合っていなければなりません．

図 9.1 (a) は，曲げモーメントといわれるものです．はりの両端に同じモーメントが働き，つり合っています．そのため，はりは回転しないで静止しています．はりには上に凸の曲げがかかります．図 9.1 (b) は，ねじりモーメントまたはトルクといわれます．ねじりモーメントが働くことで，ものが回転します．ですから，ものを回転させる軸にはトルクが働いています．

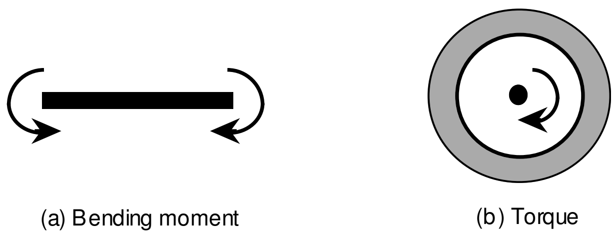


図 9.1: 曲げと回転

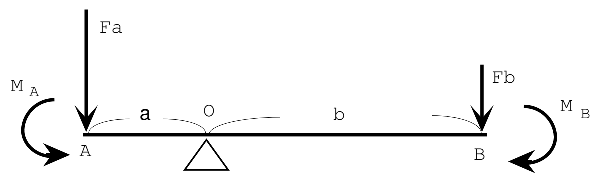


図 9.2: てこの原理

モーメントの学習の基本は，てこの原理です．理科の時間に「やじろべい」,「てこの原理」の勉強をしたことがありますね．これらの学習は，モーメントの学習そのものです．あ

いまいなモーメントの概念から，明確で定量的に取り扱えるモーメントの学習にしていきましょう．

図9.2を見てください．このてこがつり合っている時，力 F_a, F_b とレバーの長さ a, b の間の関係について考えます．O点まわりのモーメントを考えましょう．A点に働く力が発生させるモーメント M_A は

$$M_A = F_a \cdot a \tag{9.1.1}$$

となります．つまり，モーメントは回転中心からの距離 a と腕に作用する力（直線aに対して垂直な力）F_a の積で定義されます．同様にして，B点に働く力が発生させるモーメント M_B は

$$M_B = -F_b \cdot b \tag{9.1.2}$$

で定義されます．この式でマイナスの符号を付けたのは，式(9.1.1)で反時計方向に回転させるモーメントを正にし，それと反対方向に回転させるモーメントを負にしたからです．式(9.1.1)と(9.1.2)がつり合っているので，

$$M_A + M_B = F_a \cdot a - F_b \cdot b = 0 \tag{9.1.3}$$

$$F_a \cdot a = F_b \cdot b \tag{9.1.4}$$

が成立しています．これが，てこの原理です．

モーメントの単位は，[力 × 長さ] ですから，N·m になります．仕事の単位J (Joule=Nm) と同じ単位ですが，モーメントは力の方向に対して垂直方向の力です．

モーメントの考え方は，これから学ぶ材料力学では大切な考えの一つです．なぜならば，物が静止してつり合っている力学を扱う静力学では,「力とモーメントのつり合い」がまず基本になるからです．力とモーメントのそれぞれの和がゼロであることを使い未知数を求めていきます．

【例題】

図9.3に示されるはり[1]は，A, Bの両端を指示されています．そして，C点に荷重 W が集

[1] はり (beam) は機械・構造物の基本になる要素です．はりは軸方向に対して垂直な力を受ける部材と定義できます．部材軸方向に力を受ける物は，柱と呼んでいます．柱は圧縮の力を受けるのに対して，はりは曲げの凸面で引張りを生じるので，強度が問題になります．はり，家やビル，橋など構造物の基礎です．この問題を応用することで，いろいろなことがわかります．

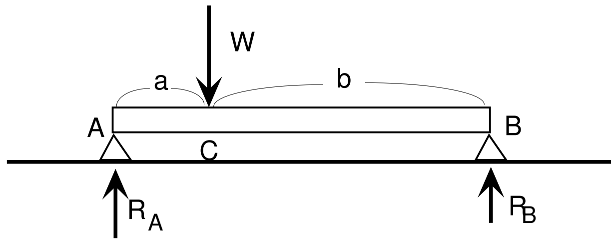


図 9.3: モーメントと力のつり合い

中しています．このときの反力 R_A, R_B はいくらになるでしょう．力のつり合いを考えると

$$R_A + R_B - W = 0 \tag{9.1.5}$$

が成り立ちます．ここでは，上方向の力を + にしています．モーメントのつり合いを考えましょう．モーメントのつり合いを考えるときに大切なことは，どの点を中心にしてモーメントを考えるかを完全に統一しなければなりません[2]．ここでは，A 点まわりのモーメントを考えましょう．

$$-Wa + R_B(a + b) = 0 \tag{9.1.6}$$

ただし，反時計方向回転のモーメントを + にとっています．

さて，式 (9.1.5), (9.1.6) を連立で解きます．

$$R_B(a + b) = Wa$$
$$R_B = \frac{Wa}{a + b}$$

これを式 (9.1.5) に代入して，

$$R_A + \frac{Wa}{a + b} - W = 0$$
$$R_A = \left(1 - \frac{a}{a + b}\right) W = \frac{b}{a + b} W$$

以上の結果をまとめると，

$$R_A = \frac{b}{a + b} W, \quad R_B = \frac{a}{a + b} W \tag{9.1.7}$$

[2] どの点でも，必ず正解が得られます．求められない人，計算間違いをするケースは，

1. W, F_A, F_B の力のモーメントを求めるときにモーメントの基準点がばらばら．
2. モーメントの基準点を自分で指定できない．どこに指定すべきかわからない．

などです．この解決策は，演習して自分なりになれることです．力学も道具と考えれば，慣れること習熟することが，手際よく正しく使う近道です．近道とは,「急がば回れ」のごとく，手間，暇をかけることですね．

になります．

式 (9.1.6) の代わりに，モーメントの基準を C 点にした，

$$-R_A a + R_B b = 0 \tag{9.1.8}$$

でも，B 点を基準にした

$$-R_A(a + b) + Wb = 0 \tag{9.1.9}$$

を使っても結果は同じです．

問題

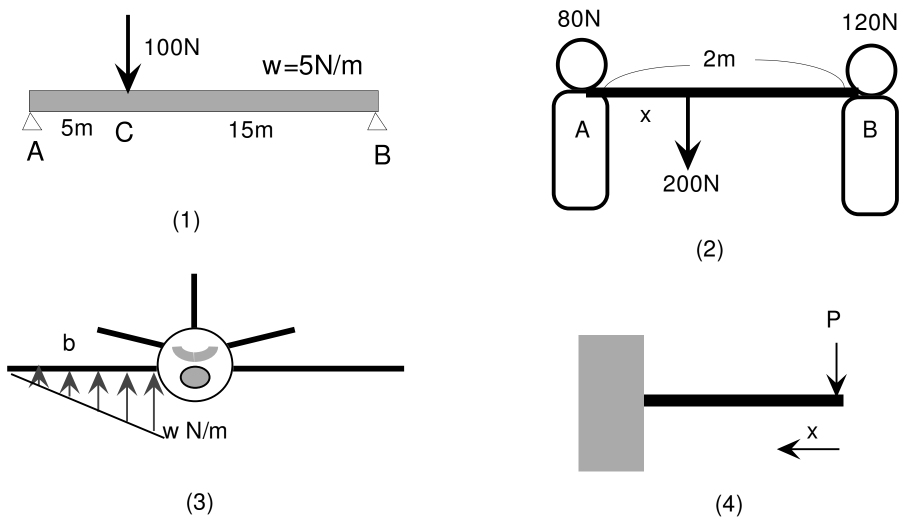


図 9.4: モーメントの問題

1. 図 9.4 (1) の A, B 点の反力はいくらになりますか．
2. A さんと B さんで荷物を担ぎます．A さんの体力が B さんよりも少ないので，図 9.4 (2) に示すように 200N の荷物の位置を A さんから x の 距離にし，負荷をそれぞれ 80N, 120N に配分することにしました．x はいくらにすればよいですか．
3. 図 9.4 (3) の航空機は，主翼の付け根で w，翼端 0 の直線分布荷重があり，この揚力で航行していることを考えます．翼長を b としたときの付け根の曲げモーメント M はいくらですか．両翼により発生する揚力はいくらですか．

4. 図 9.4 (4) のように，先端に P の荷重が作用しているはりが静止しています．先端からの距離を x とすると，任意の位置 x で両側のモーメントが等しくなければなりません．先端からの距離 x とともにはりの中に生じるモーメント m はどうなっていきますか．曲げモーメントが一番大きくなるところはどこで，いくらですか．このはりは，どこで壊れますか．

9.2 モーメントによる運動

モーメントによるつり合いの問題は，よくわかりましたか．ここでは，もう少しダイナミックな話に触れましょう．

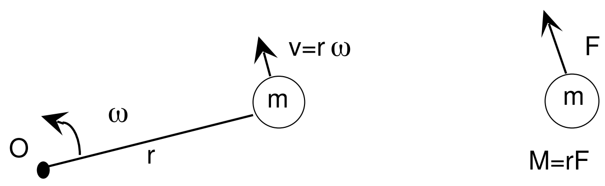


図 9.5: モーメントによる回転

モーメントによる回転を考えましょう．モーメントの定義は

$$M = Fr = m\alpha r \tag{9.2.1}$$

ですから，回転軸から r の距離に質量 m のある回転体を考えます (図 9.5)．そうすると質量 m に F の力がかかることになります．角速度は ω (rad/sec) とすると，物体の速度 v は，

$$v = r\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{9.2.2}$$

になります．物体の加速度は α は

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = rd^2\theta over dt^2 \tag{9.2.3}$$

式 (9.2.1) と (9.2.3) から

$$M = mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{9.2.4}$$

となります．この式の I を慣性モーメント (Moment of inertia) といいます．この式を変形すると

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{M}{I} \tag{9.2.5}$$

になります．一般の複雑な方に対する慣性モーメント I は，

$$I = \int r^2 dm \tag{9.2.6}$$

で，求められます．

式 (9.2.5) から，慣性モーメントが大きいと角加速度を大きくするのに余分なトルク（回転モーメント）が必要になることがわかります．小さなトルクしかもたない人間は，自転車の慣性モーメントを小さくするために，リムとスポーク構造で，タイヤもスリムにしています．逆に，回転のエネルギーを保存するフライホイールは，慣性モーメントが大きい方がよいことになります．フィギュア・スケートのスピンでは腕などを縮めて，慣性モーメントを小さくして回転数を上げます．

図 9.6: 馬の脚も回転運動，速く走るために膝を曲げる

私たちの脚も股関節，膝を回転中心とする回転運動です．蹴った後の脚は速く戻るために，慣性モーメントを小さくする必要があります．図 9.6 を見てください．膝を曲げて慣性モーメントを小さくして速く脚を戻し，脚の回転数を上げるわけです．体育の授業で,「もも上げ」や「もっと膝を上げて」などと走るときにアドバイスをうけた（怒鳴られた）ことがみなさんもあるでしょう．これらのことも，0.01sec を競う 100 メートル走では，膝の素速い曲げ，股関節の回転で膝をどこまで出せるかが大切です．走ることの本質でさえも，自然の摂理の中にあります．

筋力が弱く膝の曲げが小さいと，素速い膝の曲げが難しいですから，足が遅くなってきます．体を作る世代のみなさんは，学ぶこともに加えて，ぜひスポーツをしましょう．

「若ものよ」　　（ぬやまひろし作詞）

若ものよ

からだを鍛えておけ

美しい心が

たくましいからだに

辛くも支えられる日が

いつかはくる

そのひのために

からだを鍛えておけ

若ものよ . . .

問題

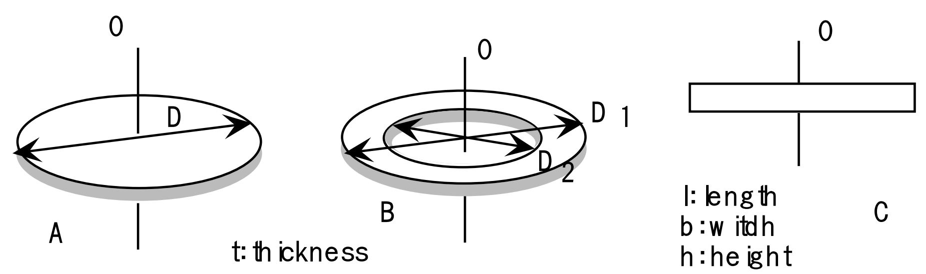


図 9.7: 回転体の慣性モーメント

図 9.7 に示す形状の物体は軸 O を中心に回転しています．密度は ρ とします．

1. 円板 A の慣性モーメントを求めましょう．
2. 円板 B の慣性モーメントを求めましょう．
3. 角材 C の慣性モーメントを求めましょう．

第10章　材料の力学挙動と強度

前章までは，力，モーメントの概念を学んできました．それらを通して力学的に事物を見て，取り扱う基礎を身につけました．この章では，それらを用いて現実の工学問題について学びます．

人類歴史は，理想の材料を手にするために歴史とも言えます．道具を作り，生産活動を行ってきた人類は，石器，土器，木材，金属と多様な材料を生産のための材料としてきました．今日でも，セラミックス，複合材料など新素材を次々と開発しています．人類の進むところには，常に材料があります．

材料には，大きく分けて二つの種類があります．それは，**構造材料** (structural materials) と**機能材料** (functional materials) です．構造材料は，力を受けもつもことを目的とした材料です．ですから橋や構造物，機械，車輌，船舶，航空機，プラント装置などは，すべて構造材料そのものと考えても間違いはありません．機能材料は，電子デバイスに代表される電子材料です．光を出したり，受光したり，磁気や電気などの発生を目的とした材料は，力を受け持つことを目的としていませんから，構造材料でなく，ある機能を発揮するための機能材料です．

この章では，人間の歴史と最も関わりのある構造材料について学びます．構造材料であるからには，力を受けてどのように変形し，どのように破壊するかを知る必要があります．材料の力学挙動を知ることで，強くて安全な機械を作ることができます．[1]

[1] これに関係する基礎的学問は，材料力学 (strength of materials) です．ぜひ，自ら材料力学の書物を手にとって気に入った本を一冊は購入してください．その本は，本講義の中では説明しきれないことを厳密に表現してあるばかりでなく，材料力学の体系もよくわかります．問題を解くのにも役立つはずです．さらに，弾性力学，塑性力学を学んだ後，破壊力学，材料強度学などが専門分野としてあります．小生は，材料力学に興味を覚えよく学んだのですが，弾・塑性力学，材料強度学は興味がわかず単位を取得できませんでした．しかし，皮肉なことに現在は，X線材料強度学を中心にして新素材の材料強度学および破壊力学を研究しています．それで飯を食おうとすると意外と興味も理解も進みます．何事も，人生と重ね合わせて学ばないと身につかないものです．学生諸君も，人生を築く自分の学問に出会えることを期待します．

10.1　材料の力学挙動

10.1.1　応力とひずみ

構造材料の機械的性質を調べる試験の基本は引張り試験です[2]．試験片を用意して，それを破壊するまで引張ることで，その材料の特性がわかります．その他，ねじり試験や圧縮試験もありますが，材料は引張りで壊れることが多いので，引張り挙動が重要です．

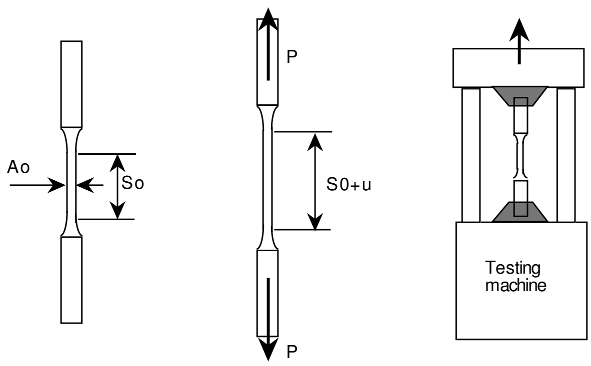


図 10.1: 引張試験片と引張試験機

図 10.1 に示すような引張試験片を用意して，図のような材料試験機で試験片を引張ることを**引張試験** (tensile test) と言います．両端を引張られ試験片は伸びます．荷重 P とともに変位 u を測定することで，試験片にかかる力と変形を記録します．しかし，荷重と変位の関係は，試験片の断面積や長さに依存します．試験片の形状，寸法に依存しない普遍的な整理方法を考えなければなりません．単位断面積当たりの力と単位長さ当たりの変位との関係について考えれば，材料の特性を試験片寸法に依存しない普遍的な表現ができます．

図 10.1 を例に，単位断面積当たりの力を求めてみましょう．力 P を断面積 A_0 で割ればよいので，

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \tag{10.1.1}$$

となります．この σ を**応力** (stress) といいます[3]．応力の符号は，引張応力の場合を正 (+)

[2]ガリレオ・ガリレイは，「新科学対話」の冒頭で材料の引張り強度について考察し，綱の強度や金属の強度を討論しています．興味深いのは，兵器製造の経験から，同じ材料で大きい物ほど小さい物よりも丈夫でなく，「機械大なれば，弱さ大なり」と述べていることです．これは，まさに破壊力学の教えるところです．ベネチヤの造兵廠で日々機械の運転や製作している職工は，代々の経験を受け継ぎ，自分で観察をし，上手に説明する技も心得ていました．彼らの活動は，研究者たちの思索を刺激していたことを伝えています．

[3]実際の物体の応力は，位置と面と方向を定義してはじめて決定されます．応力は 2 階のテンソルであり，ベクトルと異なります．一般の弾性論では，三軸応力の定義を必要としますが，ここでは一軸応力として考えます．

に，圧縮応力を負 (−) にします．応力 σ の単位は，力 (N) を面積 (m^2) で割りますから，

$$\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] = [\mathrm{Pa}] \tag{10.1.2}$$

という単位を使います．Pa はパスカル[4]と呼びます．天気予報でヘクトパスカル (hPa=100Pa) という単位を耳にしたことはありますね．応力は，圧力 (pressure) と同じ単位，物理量ですが，圧力は流体による単位面積の力であり，応力は物体内に生じる現象を対象とします．

さて，単位長さ当たりの変位を求めましょう．これは，変位 s_0 を標点間距離 s_0 で割ればよいので，

$$\varepsilon = \frac{u}{s_0} \tag{10.1.3}$$

となります．この ε を**ひずみ** (strain) といいます．伸びた量に比例して細くなります．縦方向のひずみ ε_y に対して横方向のひずみ ε_x の比 ν を

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \tag{10.1.4}$$

と表して，ν をポアソン比 (Poisson's ratio) といいます．ひずみの単位は，変位 (m) を標点長さ (m) で割るので，

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = 無次元$$

となります．

以上の応力，ひずみなどの物理量は，機械を学ぶ上で基本的量ですから，完全に身につける必要があります．すべての機械の現象が，応力，ひずみで表現されます．これは，電気の回路の現象が，電圧や電流で表現されことと同じです．

問題

1. 直径 10mm の丸棒に 500N の引張り荷重がかかっているときの丸棒の応力 σ を求めましょう．
2. 引張り力が加わり 10m の鉄骨が 13mm 伸びた時，鉄骨のひずみ ε を求めましょう．
3. 1000N の引張り荷重を受けるとき，幅 $b = 20$mm, 厚さ $t = 3$mm の断面をもつ板と直径 $8mm$ の丸棒ではどちらの応力が小さいですか．

[4]Blaise Pascal (1623-1662) フランスの数学，物理学，哲学者．16 才で円錐曲線論を著し，パスカルの法則を明らかにしました．トリチェリの真空についての実験を行っています．その点では，圧力と関係の深い学者です．

4. 船体の甲板の熱膨張係数を $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}$/K とします．灼熱の太陽の輻射で 60K 温度上昇しました．初期長さ l が 100m とすると，変位 Δl は，いくらですか．また，ひずみ ε は，いくらですか．

10.1.2　軟鋼の引張試験

実際に軟鋼[5]の試験片を引張ったときの応力-ひずみ線図を図 10.2 に示します[6]．

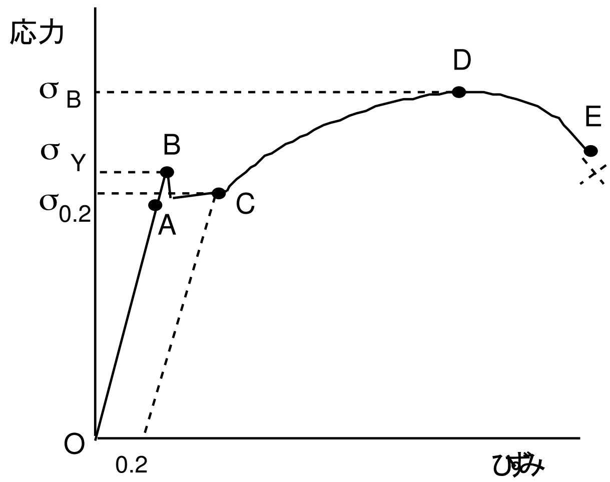


図 10.2: 軟鋼の応力-ひずみ線図

O 点から A 点までは，応力とひずみは線形であり[7]，この関係を弾性 (elasticity) といいます．この領域で除荷すると試験片の変形は完全に元に戻ります．弾性の限界を示す応力を弾性限度といいます．

B 点を**降伏点** (yield point) といいます．降伏現象は，弾性を越える引張りを受けた試験片がすべり現象を起こすために生じるもので，応力を上げなくても次々といろいろな面ですべり，応力は大きくならなくても大きなひずみを示します．まるで静止摩擦力を越えた物体が動き始めた様子と類似しています．B 点の応力を**降伏応力** σ_Y といいます．軟鋼以外で降伏現象を示さない材料では，0.2%の永久ひずみが生じる応力を**耐力** $\sigma_{0.2}$ (proof stress) と称

[5]軟鋼は炭素含有量が 0.3wt%以下の柔らかい鋼です．降伏という独特の現象を示します．アルミ，銅などの非鉄金属は降伏現象をもちません．軟鋼は，ネジ類，鋼板，一般構造用鋼など多く利用され機械材料です．

[6]ここで示す応力は，初期断面積で荷重を除しています．この応力は公称応力 (nominal stress) といわれます．これに対し，実際の断面積で除した応力は，真応力 (actual stress) といいます．ひずみも標点距離で伸びを除したひずみを公称ひずみ (nominal strain) といいます．では，真のひずみはどうなるのかを考えてください．ヒントは，自然ひずみ，対数ひずみです．

[7]比例関係にあることを線形 (linear) といいます．直線関係になっていることと同じです．

し，降伏応力と同等に扱います．降伏点を過ぎた材料は，もはや除荷しても永久変形（塑性変形）が残ります．この性質を**塑性** (plasticity) と呼びます．塑性は金属の特徴で，加工性もこれに由来します．

C 点に達すると降伏によるすべりは完了し，さらに，すべりを発生させるにはより大きい応力が必要になります．これは，材料の転位密度が増し，すべりの抵抗が増大するためです[8]．そのために，応力を増しながらひずみも増していきます．この現象を加工硬化 (work hardening)[9] といいます．

D 点に達すると応力は最大を示し，やがて減少します．この最大応力を**引張強さ** σ_B といいます．この後，応力が減少するのは試験片にくびれが生じるために，断面積が減少していくためです．図 10.3 は，破断した試験片ですが，くびれた所に変形が集中して，ますますくびれが大きくなり，応力が限界に達して破断 (rupture) します．破断した試験片の断面はくびれているだけでなく，カップ& コーンの形状をしています．

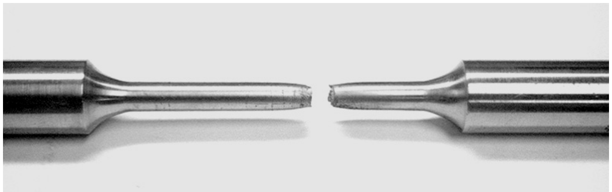


図 10.3: 破断した試験片

問題

1. 内部と周表面では破壊のモードが異なり，周表面は引張り方向に 45 度面で破壊し，芯部は引張り応力方向に対して垂直な面になっています（カップ& コーン）．これはどうしてでしょうか．

2. 引張り試験におけるひずみは小さな変位を測定します．変位，ひずみを求める方法にはどんな方法がありますか．3 つほど考案しましょう．

[8] 転位 (dislocation)．材料の塑性変形のミクロの様子を透過型電子顕微鏡で観察すると，原子の結合の一部がはずれ，隣り合った原子と結合するこが見ることができます．この原子同士の結合=格子結合を断ち切ったものが転位です．この転位の立場から材料の挙動を考えるのが転位論です．

[9] 加工硬化する材料は，塑性とともに硬くもろくなっていきます．ステンレス鋼は加工硬化が大きいので，引張り強さを設計基準にするとすぐ塑性してしまいます．そして，加工しているうちに硬くなるので加工性が悪く，板金加工や切削にとってはやっかいな材料です．

3. 引張り試験の荷重の与え方にはどんな方法が考えられますか.

10.2　弾性・フックの法則

機械を設計する場合，一般に材料は弾性域にあることを前提にします．自動車などの機械が使用しているときに永久変形を残すようでは，車軸が曲がったり，ドアが閉まらなくなったりして大変なことになります．弾性範囲で使用すれば，このような問題はありません．設計の基本は機械が弾性域であり，設計寿命内で破壊しないことが必要です．

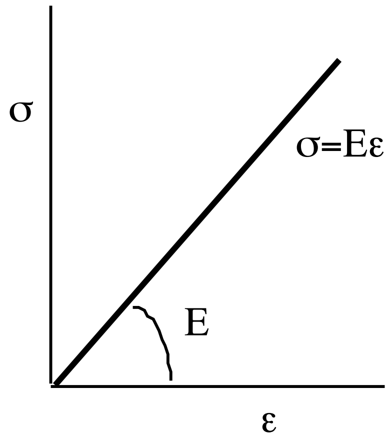


図 10.4: フックの法則

弾性域で材料のひずみ ε と応力 σ の関係はいるか，すでにわかりますね（図 10.4）．弾性にある材料では，ひずみ ε と応力 σ は線形ですから，

$$\sigma = E\varepsilon \tag{10.2.1}$$

となります．ただし，E を**ヤング率** (Young's modulus) または縦弾性定数といいます．単位は応力と同じ Pa です．ヤング率は材料により決まる値で，材料定数です．鉄鋼材料の場合は，概ね 206GPa です．アルミニウムは 70.5GPa です．アルミニウムは，鉄鋼材料に比較して同じ応力で 3 倍のひずみが生じます．ヤング率の大きな材料は，弾性変形させる応力が大きい材料になります．

この法則は，ロバート・フックが 1678 年に実験的に見つけ出したもので，フックの法則 (Hooke's law) と呼んでいます[10]．これは力のところで習った内容と同じですが，表現は応

[10] Robert Hooke(1635-1703) はバネの弾性的挙動を研究したのであり，この式を直接示したものではありま

力とひずみになっています．また，バネ定数でなくヤング率を用いて表現しています．式 (10.2.1) の方がより普遍的表記です．応力は力学量であり，ひずみは幾何学量です．フックの法則は力学と幾何学量を結合させる役目をしています．このような式を構成式といいます．

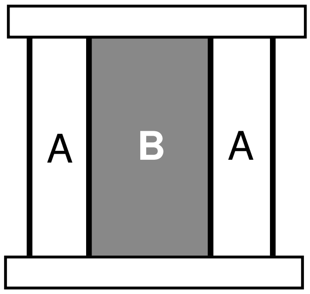


図 10.5: 熱応力

問題

1. 引張り強さ 300MPa の材料で直径 10mm の丸棒に荷重をかけたとき，限界荷重 P_{max} はいくらですか.

2. セラミックスのヤング率 300GPa，引張り強さが 800MPa です．破断するときの最大ひずみはいくらですか.

3. 一様応力下で，長さ 20mm，ヤング率 206GPa の部材が 0.1mm 縮んでいるとき，圧縮を応力はいくらですか.

4. ヤング率 E_A の材料 A，ヤング率 E_B の材料 B があります．これらで同じ断面形状の棒を製作し，圧縮力 F を負荷するとき，A, B のひずみの比 $\varepsilon_A/\varepsilon_B$ はいくらですか.

5. 図 10.5 に示す材料 A, B は，それぞれヤング率 E_A, E_B の材料 B，熱膨張係数 α_A, α_B です．両材料は同一長さで製作された後，両端を固定し温度を ΔT 上昇させました．A, B の断面積が同じと仮定して，その時の A, B の応力を求めましょう.

せん．フックの法則にあるヤング率の由来は，イギリスの物理学者 Thomas Young (1773-1829) です，彼は，いろいろな断面の引張りと圧縮による変形の研究をして片計量が断面積に依存していることを発見しました．このように多くの研究成果が歴史を通じて体系化され，今日のフックの法則になっています．いろいろな法則に出てくる科学者の名前を調べると，その法則の完成に至るまでの長い歴史がわかります.

10.3　許容応力と安全率

材料の強度設計には，いろいろな方法があります[11]．もっとも基本になるのは，応力基準設計です．これは，機械部材の設計限界を応力で判断する方法で，次式のように定義されます．

$$\text{許容応力} = \frac{\text{基準強さ (破壊限度)}}{\text{安全率}} \tag{10.3.1}$$

基準強さは，部材の使用条件により決定され，材料の引張り強さや降伏点，疲労限度[12]などが用いられます．現実には，基準強さで正確に破壊する理想的材料はありません．それよりも低い応力で破壊したり，その応力よりも丈夫であったりします．基準応力そのものも統計的ばらつきをもった値の平均です．加工・仕上げのばらつきや，機械の使用状況も完全に把握することは困難です．このような不明瞭さが常に機械の設計には付きまといます．その不明瞭さを処理する便宜的方法が，式 (10.3.1) の**安全率** (safety factor) です．不確定要素やばらつきが大きい場合，より安全を確保したいときには大きい安全率を採用します[13]．

安全率で基準強さを除して，**許容応力** (allowable stress) が得られます．設計する場合には，部材の**設計応力** (design stress) を許容応力以下に設計しなければなりません．設計書には，部品のどの所が最も高い応力になり，その場所の応力が許容応力を越えていないことを計算で示すことが求められます．

表 10.1 に安全率の例を示しました．機械材料として使用される鋼の安全率が他の材料に比較して小さいことがわかります．それだけ，鋼の信頼性が高く機械材料として優れていることを示しています．

機械の信頼性は，設計だけではありません．正確に設計し安全を保障しても，製造，組み立て，運転といろいろな段階で問題を発生させることがあります．機械が間違いなく動いているためには，製造，施工のチェックが必要ですし，定期的な保守と点検があってはじめて安全が確保されます．その意味では，有能な設計者だけで機械が安全とは言えません．本来は，設計から保守点検に至るまで，優れた人格が求められます．

[11]破壊力学の発展により，破壊じん性を基準にする方法もあります．さらに，フェイルセーフ設計，損傷許容設計などいろいろな設計概念が必要に応じてとられます．

[12]材料が疲労き裂を発生しないための限界応力．通常は 10^7 回の応力振幅に耐える応力値を疲労限度 (fatigue limit) とします．

[13]安全率という数値を率直に受け止めれば，それは我々人間の未知数の大きさを示しています．学生のときに読んだある破壊力学の書には，”the safety factor is the ignorant factor.” と記され，強いショックを受けた記憶があります．

表 10.1: Unwin の安全率

材料	静荷重	繰返荷重		変動荷重・衝撃
		片振	両振	
鋼	3	5	8	12
鋳鉄	4	6	10	15
木材	7	10	15	20
れんが・大理石	20	30	—	—

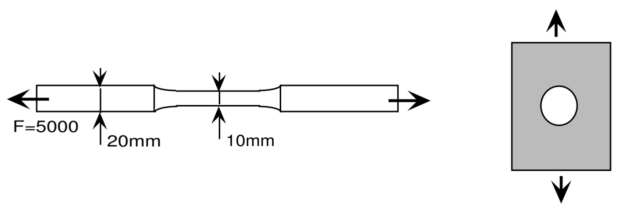


図 10.6: 丸棒・板の引張り

問題

1. 図 10.6 の丸棒の破壊基準応力を 140MPa，安全率を 3 とした場合の許容応力はいくらですか．図面の寸法で求めた設計応力は，その許容応力以下ですか．

2. 厚さ 3mm の板に 1500N の引張り力がかかる場合，板幅をいくらにしたらよいですか．板の許容応力は 20MPa とします．

3. 図 10.6 の板のどの位置の設計応力を求めなければなりませんか．

おわりに

この技術教育・機械の授業で数学や物理の基礎を習うことで，とまどった学生諸君もいるでしょう．この授業の目的は，数学や物理嫌いの学生を作ることが目的ではありません．人類の歴史に照らして解析や力学を学ぶことにより，数量的に事物を扱うことを学ぶことが目的の一つです．

この授業で，数学や力学は長い歴史を通して発達し，今日の教育の基礎になっていることを実感できたのではないでしょうか．公式の一つにも，人間の歴史と努力があります．工学の道具として基礎解析を身につけるときも，人間の歴史とともに学ぶことにより，無味乾燥な学習から学問的に興味深い学び方ができます．そして，そのような学び方は，みなさんが教育や研究するときに，大切な視座を与えてくれるはずです．

また，高校までに習ったことの中で証明なしに機械的に記憶されている事柄のいくらかを説明しました．このことで，ようやく科学的根拠を持って確信することができたのではないでしょうか．

受験競争や学歴主義の解消の名目で，共通一次，センター試験，ゆとりの時間そして総合的学習の時間が，文部省により進められてきました．これらは，受験競争や学歴主義を解決することなく，子どもたちから学習の時間を奪ってきました．端的に言えば，受験競争を否定しないで，学ぶことを否定してきたのが，この二十年間のでした．学ぶことをもっと取り戻し，みんなが平等に権利を保障される社会を実現しなければなりません．

最後に，付録の記号についての入力では，学生諸君の協力をいただきました．どうもありがとうございました．

付 録A　数学記号

数学の学習において記号は大きい役割を持っています．そのため，記号についての理解と利用は重要になります．[1]

A.1　集合

- $\sim p$

  1. p でない
  2. p の否定
  3. ノット，p
  4. not p.

♡ **注意**　命題の否定をあらわすには，このほか，$\bar{p}$, $\neg\, p$ などが用いられる．

- $p(x)$

  1. p，x
  2. p，かっこ x（かっこ）
  3. 条件命題 p，x
  4. conditional proposition $p(x)$.

♣ **参考**　条件命題のことをオープンセンテンス (open sentence, 開いた文) ということもある．また，命題関数 (propositional function) ともいう．

　オープンセンテンスに対して，その真偽がただちに判定できる文章 (命題) をクローズセンテンス (closed sentence, 閉じた文) という．

[1] この付録は,「高校数学—記号について」（1972，学研書籍）を基にして記しました．

- $p(x) = q(x)$

  1. p, x，イコール，q, x
  2. p, x と q, x は論理的に同値
  3. $p(x)$ and $q(x)$ are logically equivalent each other.

  ◇ **留意点**　$p(x)$ と $q(x)$ とが論理的に同値であるというのは，$p(x)$ と $q(x)$ の真偽が一致することである．真偽が一致するかどうかは真理表 (truth table) をつくればよい．論理的に同値であることを identity ともいう．記号としては $\equiv$ を用いて，$p(x) \equiv q(x)$ とあらわすこともある．

- $p(x) \to q(x)$

  1. p, x，ならば，q, x
  2. すべての x について，p, x が真ならば，q, x も真である．
  3. if $p(x)$,then $q(x)$.

  ◇ **留意点**　2 つの条件命題を $p(x), q(x)$ とするとき,「すべての x について，$p(x)$ が真ならば，$q(x)$ も真である.」ことを $p(x) \to q(x)$ とあらわすのである．このとき，$p(x), q(x)$ の真理集合をそれぞれ P,Q とすれば，$P \subseteq Q$ の関係がある．この対応関係を十分に理解させることが大切である．この場合は
  「$q(x)$ は $p(x)$ であるための必要条件」,「$p(x)$ は $q(x)$ であるための十分条件」ともいえる．

- $p(x) \rightleftharpoons q(x)$

  1. p, x ならば，q, x で，しかも，q, x ならば p, x である．
  2. p, x と q, x は同値
  3. p, x であるとき，かつそのときに限り q, x
  4. p, x は q, x であるための必要十分条件
  5. q, x は p, x であるための必要十分条件
  6. if $p(x)$,then $q(x)$ and if q(x) and if q(x),then $p(x)$.

◇ **留意点**　$p(x) \rightleftharpoons q(x)$ は，$p(x) \to q(x)$ とその逆 $p(x) \to q(x)$ とが同時に成り立つことが主張しているのであるから，$p(x), q(x)$ の真理集合をそれぞれ P,Q とすれば，P $\rightleftharpoons$ Q, かつ Q $\rightleftharpoons$ P であるから P=Q である．この対応関係を十分に理解させることが大切である．

$p(x)$ と $q(x)$ とが同値であるというのは，表面にあらわれた $p(x)$ と $q(x)$ との形は違っていても，内容的には全く同じであるということである．

♡ **注意**　$p(x) \to q(x), p(x) \rightleftharpoons q(x)$ において，$\to, \rightleftharpoons$ の代わりに記号 $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ を用いることがある．

- G.C.M.
  1. 最大公約数
  2. G,C,M
  3. Greatest common measure.
- L.C.M.
  1. 最小公倍数
  2. L,C,M
  3. Least common multiple.

◇ **留意点**　中学校の１年では，整数について約数，倍数，公約数，公倍数，最大公約数，最小公倍数などを学習している．ここでは，整式についてであるが，整数でも整式でもこれらの名称には変わりがない．ただ，整式の場合には，公約数，公倍数といっても数係数を考えないことに注意させたい．

- $a \in A$
  1. a は集合 A に属する
  2. a は集合 A の要素（元）である
  3. a, 属する,A
  4. a is the element of (a set) A

- $b \notin A$
  1. b は集合 A に属さない
  2. b は集合 A の要素（元）ではない
  3. b, 属さない,A
  4. b is not the element of (a set) A

◇**留意点** a が集合 A の要素 (元) であるかどうかを表す場合には「属する」,「属さない」といい，集合の包含関係をあらわす「含まれる」，含まれない」と区別するようにする.

◇**注意** $\not\in$ の代わりに $\ni$ を用いて，$b \ni A$ のようにあらわすこともある.

- A={2,3,4,5}
  1. A は 2,3,4,5 を要素 (元) とする集合
  2. A は 2,3,4,5 の集合
  3. 2,3,4,5 を要素 (元）とする集合 A
  4. A is the set of integers which are greater than 1 and less than 6

- $A = \{x|1 < x < 6, x$ は整数 $\}$
  1. A は，$1x6$ を満たす整数 x の集合
  2. A は，x を要素 (元) とする集合で，その x は $1x6$ を満たす整数
  3. A is the set of all integers x satisfying the condition $1 < x < 6$

◇**留意点** 集合のあらわし方には，要素 (元) を全部書き並べる方法と，文章または式で条件を示す場合とがある．前者は集合の表示または外延的な表現であり，後者は集合の記述または内包的な表現である.

後者は $\{x : \cdots\}, \{x; \cdots\}, \{x| \cdots\}$ という記法が用いられることがある.

- $A \subseteq B$
  1. 集合 A は集合 B に含まれる

2. 集合 A は集合 B の部分集合である
3. A is contained in B
4. A is the subset of B

- $B \subseteq A$

1. 　集合 B は集合 A を含む
2. 集合 B は集合 A を部分集合にもつ
3. B contains A

- $A \subset B$

1. 集合 A は集合 B に含まれる
2. 集合 A は集合 B の真部分集合である
3. A is implied by B
4. A is the proper subset of B

- $B \subset A$

1. 集合 B は集合 A を含む
2. 集合 B は集合 A を真部分集合にもつ
3. B implies A

◇**留意点** 集合の包含関係 $\subseteq, \supseteq$ は，実数の大小関係 $\leq, \geq$ と対比させて, 次の事に注意する.

– $A \subseteq B, B \subseteq C$ ならば $A \subseteq C \iff a \leq b, b \leq c$ ならば $a \leq c$

– $A \subseteq B, B \subseteq A$ ならば $A \subseteq B \iff a \leq b, b \leq a$ ならば $a \leq b$

- $\emptyset, \{\}$

1. 空集合
2. empty set

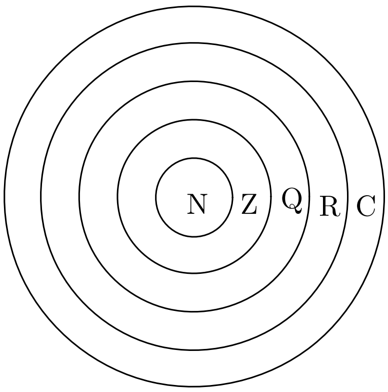
◇**留意点** 空集合は「くうしゅうごう」と読み,「そらしゅうごう」ではない．{} は空集合で，{∅} は空集合を要素（元）とする集合であるからまちがえないようにする．

- $A \subset R \subset C$

1. 集合 A は集合 R に含まれ，集合 R は集合 C に含まれる
2. 集合 A は集合 R の真部分集合，集合 R は集合 C の真部分集合
3. A is the proper subset of R and R is the proper subset of C

◇**留意点** いくつかの集合の包含関係をあらわすときにこのような表現がなされるが，これは数の大小関係 $1 < 3 < 6 < 9 < \cdots$ と対比させて考えればわかりやすいし，また，図を用いてその包含関係を示せばなお明らかになろう．たとえば，自然数の集合を N，複素数の集合を C とすれば，

$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$



- $\bar{A}$

1. A の補集合
2. 補集合 A
3. A, バー
4. complementary set A

◇**注意** 補集合をあらわすには，このほか，Á,Ã,A^c などが用いられる．

- $P \cup Q$

1. union of set P and set Q

- $P \cap Q$

  1. intersection of set P and set Q

- $f'(a)$

  1. (21 ページ参照)
  2. the first derivative of $f(x)$ at $x = a$

- $n(A)$

  1. n, かっこ, A, (かっこ)
  2. n, A
  3. 集合 A の要素の個数
  4. the number of elements in set A

- $\sim p \to \sim q$

  1. p でないならば q でない
  2. ノット p ならばノット q である
  3. if not p, then not q

  ◇**留意点**　命題とその逆 裏, 対偶については, 集合と対応させて理解させることが基本である.

- $n(P)$

  1. n, かっこ, P, (かっこ)
  2. n, P
  3. 集合 P の要素 (元) の数
  4. the number of element in set P

  ◇**留意点**　集合の要素 (元) の数は, その集合が有限集合でなければ表せない.

- $n(P \cup Q)$

1. n, P, 結び, Q
2. P 結び Q の要素 (元) の数
3. the number of element in set P union Q

- $n(P \cap Q)$

1. n, P, 交わり, Q
2. P 交わり Q の要素 (元) の数
3. the number of element in set P impression Q

- $P \cup Q$

1. P 結び Q
2. P カップ Q
3. P ジョイン Q
4. P ユニオン Q
5. P と Q との結び
6. P と Q との和集合
7. P と Q との合併集合
8. union of set P and set Q

- $P \cap Q$

1. P 交わり Q
2. P キャップ Q
3. P ミート Q
4. P インターセクション Q
5. P と Q との交わり
6. P と Q との積集合
7. P と Q との共通集合
8. P と Q との共通部分

9. intersection of set P and set Q

◇**留意点**　はじめのうちは，∪ と ∩ とを混合しやすい．そこで，次のように指導 するのも一つの方法であろう．
(1) 結びは mUsubi だから U → ∪，交わりは mAziwari だから A → ∩
(2) カップ → コップ → → ∪，キャップ → 帽子 → → ∩
なるべくならば，P 結び Q，または P 交わり Q と読ませたい．

- $\sim p$

1. p でない．
2. p の否定
3. ノット，p
4. not p

♡ **留意点**　命題の否定を表わすには，このほか，$\bar{p}, -p, \rightharpoondown p$ などが用い られる．

- P’

1. P，ダッシュ
2. P の補集合
3. 補集合 P
4. complementary set P

A.2　ベクトル・行列

- $\vec{a}$

1. ベクトル，a
2. vector $\vec{a}$

- $\vec{A}B$

1. ベクトル，A,B
2. vector $\vec{A}B$

- $|\vec{a}|$
  1. ベクトル a の大きさ
  2. the absolute value of vector $\vec{a}$
- $|\vec{AB}|$
  1. ベクトル，A,B の大きさ
  2. the absolute value of vector $\vec{AB}$
- $\vec{a}+\vec{b}$
  1. ベクトル，a，プラス，ベクトル，b
  2. ベクトル，a，プラス，b
  3. ベクトル，a と b の和
  4. the sum of vector $\vec{a}$ and vector $\vec{b}$
- $\vec{b}-\vec{a}$
  1. ベクトル，b，マイナス，ベクトル，a
  2. ベクトル，b，マイナス，a
  3. ベクトル，b と a の差
  4. the difference of substracting vector $\vec{a}$ from vector $\vec{b}$
- $\vec{a}=(a_x,a_y)$
  1. ベクトル a, イコール，かっこ，a,x,a,y, かっこ
  2. ベクトル a の成分は，a,x,a,y
  3. ベクトル a の x 成分は a,x,y 成分は a,y
  4. the component of vector$\vec{a}$ is a_x and a_y
- $a=b$
  1. a, イコール，b
  2. ベクトル a, イコール，ベクトル b

3. ベクトル a, b は等しい

4. a equal b

♡ **注意** ベクトルの表わし方には

$$\vec{a},\quad \vec{A},\quad \vec{AB},\quad a,\quad \mathrm{a},\quad A,\quad \mathrm{A}$$

などいろいろな方法があるが，一般的には，a, $\vec{a}$, a が用いられることが多い．単記する場合には a は書きにくいので，$\vec{a}$ などがよく用いられる．

- pa

1. p,a

2. p, ベクトル a

3. スカラー p とベクトル a との積

4. scalar multiplication pa

◇**留意点** 普通は，pa と書き，ap とは書かない．

- $a \cdot b$

- (a, b)

1. a,b

2. ベクトル a,b の内積

3. 内積 a,b

4. scalar product of two vectors a and b

◇**留意点** $a \cdot b$,(a, b) のどちらも用いられる．内積を表わすときは $a \cdot b$ のように必ず · を書き，これを省略して ab としたり，$a \times b$ と書いてはいけない．数の場合は，$a \times b$,$a \cdot b$,ab はすべて同じ a と b の積を表わすが，これと混同しないように注意される．

　また，記法 (a, b) は，座標 (a, b), 開区間 (a, b) と混同しないようにしなければならない．内積の場合は (,) の中はベクトルである．

- $|a||b|\cos\theta$

1. 絶対値 a, 絶対値 b,$\cos\theta$
2. ベクトル a の絶対値とベクトル b の絶対値と $\cos\theta$ の積
3. ベクトル a,b の大きさ a,b と，a,b のなす角の余弦との積
4. the absolute value of a times the absolute value of b times $\cos\theta$

- $a \perp b$

1. ベクトル a, 垂直, ベクトル b
2. ベクトル a,b は垂直
3. a is perpendicular to b

◇**留意点** a,b がどちらも零ベクトルでないとき，$a \cdot b = 0 \rightleftharpoons a \perp b$ がなりたつことに留意させる．このことから，a,b が零ベクトルでなくても，$a \perp b$ ならば $a \cdot b = 0$ である．

これは数の場合と比較して，著しい差異があることに注意させる．

- $a \times b$

1. a, 掛ける,b
2. ベクトル a,b の外積
3. 外積 a,b
4. vector product of two vectors a and b

◇**留意点** ベクトルの外積は，空間のベクトルについてであることに注意する．ベクトル a,b の内積はスカラーであるが，外積はやはりベクトルである．$a \times b$ と $a \cdot b$ をはっきり区別させる．ベクトルについては，ab という表わし方はない．

- (l_1, l_2)

1. かっこ,l_1, l_2,(かっこ)
2. 行ベクトル l_1, l_2
3. row vector l_1, l_2

- $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

  1. かっこ,u_1, u_2,(かっこ)
  2. 列ベクトル，u_1, u_2
  3. column vector u_1, u_2

- $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

  1. かっこ,a_1,a_2,a_3,a_4,(かっこ)
  2. 行列,a_1,a_2,a_3,a_4
  3. 2×2 行列,a_1,a_2,a_3,a_4
  4. matrix a_1,a_2,a_3,a_4

♡ **注意** 記号として ( ) のかわりに [ ] を用いて $[l_1, l_2]$, $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ とあらわすこともある．また，‖ ‖ を用いて $\|l_1, l_2\|$,$\left\| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\|$ と書くこともある．

- kA

  1. k，かける，A
  2. k，A
  3. 行列 A の k 倍
  4. the product multiplied a matrix A by a real number k

- AB

  1. A，かける，B
  2. A，B
  3. 行列 A と行列 B の積
  4. A と B の積

5. the product of matrix A by matrix B

- $(e_1 \quad e_2 \quad e_3)$

1. e_1, e_2, e_3
2. 行ベクトル e_1, e_2, e_3
3. 3 次元ベクトル e_1, e_2, e_3
4. 3 次元行ベクトル e_1, e_2, e_3
5. 3 次の行ベクトル e_1, e_2, e_3
6. 3 項の行ベクトル e_1, e_2, e_3
7. row vector e_1, e_2, e_3

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1. x_1, x_2, x_3
2. 列ベクトル x_1, x_2, x_3
3. 3 次元ベクトル x_1, x_2, x_3
4. 3 次元列ベクトル x_1, x_2, x_3
5. 3 次の列ベクトル x_1, x_2, x_3
6. 3 項の列ベクトル x_1, x_2, x_3
7. column vector x_1, x_2, x_3

- $(e_1 \quad e_2 \quad e_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1. e_1, e_2, e_3，掛ける，x_1, x_2, x_3
2. 行ベクトル e_1, e_2, e_3，掛ける，列ベクトル x_1, x_2, x_3
3. row vector e_1, e_2, e_3 times
4. column vector x_1, x_2, x_3

- $\begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 \\ a_2 1 & a_2 2 \end{pmatrix}$
  1. $a_1 1, a_1 2, a_2 1, a_2 2$
  2. 行列 $a_1 1, a_1 2, a_2 1, a_2 2$
  3. 正方行列 $a_1 1, a_1 2, a_2 1, a_2 2$
  4. matrix $a_1 1, a_1 2, a_2 1, a_2 2$
- $\begin{vmatrix} a_1 1 & a_1 2 \\ a_2 1 & a_2 2 \end{vmatrix}$
  1. $a_1 1, a_1 2, a_2 1, a_2 2$
  2. 行列式 $a_1 1, a_1 2, a_2 1, a_2 2$
  3. determinant $a_1 1, a_1 2, a_2 1, a_2 2$

♣**参考** 行列式を最初に思いついたのは，ライプニッツであるといわれる．彼は連立方程式の解法から行列式を導いたのであるが，そのことは，1693 年にロピタル (L'Hopital,1661-1704) に出した手紙の中に述べられている．

また，クラメル (G.Cramer,1704-1752) も，連立 1 次方程式の解を行列式で表わしていることは著名な事実である．

A.3 関数一般

現代数学において用いられる関数の定義は，ディリクレ (P.G.L.Dirichlet,1805-1859) によって与えられている．ディリクレは，フーリエ級数についての論文の中で，関数は必ずしも式で表現される必要はなく，対応そのものであることを主張した．

以前は，1 つの関数に固定して考えていたが，同時にいくつもの，そしてさらにはある種の関数全体を考えに入れることになると，そこでは，個々の関数などと識別されることが必要となってくる．こうして写像という概念が生まれてきたのである．つまり，関数は写像として考えられ，関数の概念は，より基礎的な写像という概念に含まれてきたのである．

これが「関数を写像としてみる」という表現の由来するところである．

- $a < x < b$

 1. x は a より大きく，b より小さい
 2. x は a と b との間
 3. a 小なり x，小なり b
 4. x is greater than a and also x is less than b.

- $a \leq x \leq b$

 1. x は a から b まで
 2. x は a 以上，b 以下
 3. a 小なり等しい x，小なり等しい b
 4. x is greater than or equal to a and also x is less than or equal to b.

- $a \leq x < b$

 1. x は a 以上，b より小
 2. x は a に等しいか，a より大きく，b より小さい
 3. a 小なり等しい x，小なり b
 4. x is greater than or equal to a and also x is less than b.

- $a < x \leq b$

 1. x は a より大きく，b 以下
 2. x は a より大きく，b に等しいか，b より小さい
 3. a 小なり x，小なり等しい b
 4. x is greater than a and also x is less than or equal to b.

◇**留意点**　境い目をあらわす言葉を明確にしておくことが大切である．

· 境い目を含む言葉 $\cdots\cdots$ 以上，以下，からまで

· 境い目を含まない言葉 $\cdots$ より大きい，より小さい，の間，未満，越え

このような言葉は，小学校以来使用しているのであるが，意外と明確におさえられていないようである．したがって，機会をとらえて適確に指導しておく必要がある．特に,「～以上，～未満」,「～を越え，～以下」というような使い方を十分練習させておかないと，たとえば，統計で度数分布表をつくるような場合に影響をおよぼすだろう．

- $a \fallingdotseq b$
  1. a は b にほぼ等しい
  2. a は b にほとんど等しい
  3. a ニヤリーイコール b
  4. a is approximately equal to b.

♣**参考**　$=$は等しい，$\neq$ は等しくない，　は　から転じたものとみられ,「等しくはないが，全く等しくないものでもない」という意味を表すものと考えられる．
記号　の代わりに，記号　を用いることもある．

- $\mathrm{P}(x)$
  1. P, x
  2. P, かっこ, x, (かっこ)
  3. x の整式 P
  4. polynomial $\mathrm{P}(x)$.

- $\mathrm{P}(a)$
  1. P, a
  2. P, かっこ, a, (かっこ)
  3. $x = a$ のときの P, x の値
  4. the value of polynomial $\mathrm{P}(x)$ at a.

◇**留意点**　中学校では，すでに関数記号 $f(x)$ を学習しているので，x の整式をあらわすのに $f(x)$ などを用いてもさしつかえないが,「x についての整式」という立場を強調する意味で，$\mathrm{P}(x)$，$\mathrm{Q}(x)$ などともあらわす．むろん，$2x^2+3x-7$ を x の関数とみれば，これを，$f(x)=2x^2+3x-7$ とあらわすこともできる．

♡ **注意**　$\mathrm{P}(x)$ というあらわし方は，直線上の点 P の座標をあらわす場合にも用いられる (次の項を参照) し，また，P(A) (事象 A の確率) など類似の記号もある．なお，x の整式を単に，P,Q などであらわすときは，$x=a$ のときの P の値を $\mathrm{P}_{x=a}$，$x=b$ のときの Q の値を $\mathrm{Q}_{x=b}$ などとあらわすこともある．

- $\mathrm{P}(x)$

  1. P, x
  2. P, かっこ, x, (かっこ)
  3. 点 P, x
  4. 点 P, 座標は x
  5. point P with coordinate (x).

- $\mathrm{P}(x,y)$

  1. P, x, y
  2. P, かっこ, x, y, (かっこ)
  3. 点 P, x, y
  4. 点 P, 座標は x,y
  5. point P with coordinate (x,y).

◇**留意点**　点 P の座標については

· 直線状の点 $\longleftrightarrow$ 1 つの実数 x を用いて　(x)

· 平面状の点 $\longleftrightarrow$ 2 つの実数 x, y を組にして　(x,y)

· 空間の点 $\longleftrightarrow$ 3 つの実数 x, y, z を組にして　(x,y,z)

という対応関係を十分理解させておくことが基本である．上の $(x,\ y), (x,\ y,\ z)$ は，いずれも順序をもった組になっていることに注意を要する．2 つの数の順序をもった組を一般に順序対 (ordered pair)，3 つの数の順序をもった組を一般に順序組 (ordered triple) という．

♣ **参考**　座標の概念を導入して，直線による正負の数の幾何的表現によって，幾何学と代数学という異なった 2 つのものを統一することを可能にしたのはデカルト (R.Descartes,1596-1650) であるが，彼は座標のことを「定直線上の全ての点にある関係」とよび，必ずしも直角座標は用いてないし，Y 軸も引いていない．座標という言葉はライプニッツ (G.W.Leibniz,1646-1716) が初めて用いた．また，解析幾何学 (analytic geometry) という言葉は，ラクロア (S.F.Lacroix,1765-1843) が初めて用いたが，代数と幾何を統一するアイディアをはじめて提供した意味で，デカルトを解析幾何学の創始者としている．

- $\overline{AB}$

  1. 線分 AB
  2. バー AB
  3. AB のバー
  4. segment AB

◇**留意点**　$\overline{AB}$ は線分 AB の長さ (大きさ) をあらわすもので正または 0 であり，$\overline{AB} = \overline{BA}$ である．これに対して AB は，A から B に向かう有向線分の長さをあらわし，BA は，B から A に向かう有向線分の長さをあらわす．したがって，その長さはいずれも正であるが，方向が反対であるから $AB = -BA$ である．この両者を明確に区別させたい．

- $|b - a|$

  1. b，マイナス，a，絶対値
  2. 絶対値, b, マイナス, a
  3. the absolute value of b minus a

◇**留意点**　絶対値およびその記号 $|\ |$ は中学校で学習している．$|+5| = 5, |-5| = 5$ のように，絶対値記号の中が数の場合には扱いやすいが，記号の中が文字になると，とかく生徒は，間違いを起こしやすくなるものである．したがって

$k \geq 0$ ならば $|k| = k$, $k < 0$ ならば $|k| = -k$

となることを十分に理解させておきたい．このような絶対値記号の扱いは，主として，平方根に関して $\sqrt{k^2} = |k|$，不等式に関して $|x-2| \leq 5$ や $|a+b| \leq |a| + |b|$ などにあらわれてくることに注意したい．

♣ **参考**　関数 (函数) という言葉を初めて用いたのはライプニッツ (G.W.Leibniz,1646-1716) であるといわれる．ライプニッツは関数を明確に定義したわけではないが，変動する量－変数 x を考え，変数 x とともに変動するものを x の関数とよび，それをあらわすのに $f(x)$ などの記号を用いた．その後，オイラー (L.Euler,1707-1783) は「無限解析序説」(Introductio in analysin infinitorum,1748) という著書の中で，関数を

「1 つの変数の関数とは，その変数と単なる数または定数とから組み立てられた解析的な式である」

と定義している．オイラーは，この定義の中に用いた「解析的な式」については説明をしていないが，彼の示した関数の分類

$$\text{関数}\begin{cases} \text{代数関数}\begin{cases} \text{有理関数}\begin{cases} \text{整関数} \\ \text{分数関数} \end{cases} \\ \text{無理関数} \end{cases} \\ \text{超越関数 (指数関数, 対数関数, 三角関数)} \end{cases}$$

によって，その意味は想像できる．その後，コーシー (A.L.Cauchy,1789-1857) は，オイラーの定義した「関数は解析的な式である」を打破し，

「いくつかの変数の間にある関係があって，そのうちの 1 つの値が与えられると，他のものの値がすべて定まるならば，ふつうその 1 つの変数によって，他の変数があらわされると考えられる．このとき，この 1 つの変数を独立変数とよび，他のものをその関数と名づける」

と定義した．これは，現在まで一般に用いられていた関数の定義である．

A.4　三角関数

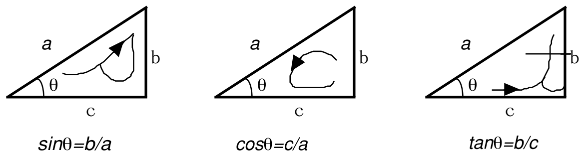
- $\sin\theta$
  1. サイン，θ
  2. θ の正弦
  3. sine　θ.
- $\cos\theta$
  1. コサイン，θ
  2. θ の余弦
  3. cosine　θ.
- $\tan\theta$
  1. タンジェント，θ
  2. θ の正接
  3. tangent　θ.

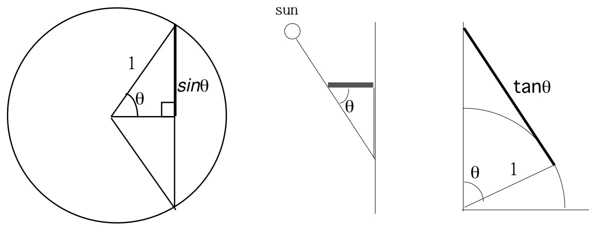
◇ **留意点**　従来は，中学校で三角比を学習していたので，生徒はこれらの記号をすでに知っていたが，こんどの改訂で，中学校では三角比を一切扱わなくなったので，高校で初めて学習することになる．したがって，数学 I では三角比と三角関数を同時に学習することになるわけである．一般には，直角三角形における角の大きさと２辺の長さの比との関係から三角比を導入し，その後，角を一般角に拡張し，円周上の点の座標と半径との比から三角関数を定義し，これが直角三角形における三角比の定義と一致することを理解させることになるが，これについては

$\sin\theta$，$\cos\theta$ は，角の大きさをあらわす実数の集合から実数の集合 $\{x| -1 \leq x \leq 1\}$ への関数

であることを十分に理解させることが大切である．

♣ **参考**　初期の学習では，sin, cos, tan の区別が分かりづらいので，その理解に次のような方法が工夫されている．





- $\sin^{-1} x$, $arc \sin x$

  1. アークサイン x
  2. x の逆正弦関数
  3. x の逆正弦
  4. インバースサイン x
  5. inverse sin x.

◇ **留意点** $\sin^2 x$ は，$(\sin x)^2$ を表したもので，これを $\sin x^2$ と書くと，x^2 の sin と誤るので，sin の右肩に指数を書く．$\sin^{-1} x$ は，$\sin x$ の－1 乗を表したものではなく $\sin x$ の逆関数を表したものである．したがって，$\sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x}$ というような関係は成り立たない．

♡ **注意** 一般に，関数 f の逆関数を f^{-1} と表す．右肩の－1 は逆を表したもので，ある数の集合における a の逆元を a^{-1} と表すのと同じである．ただ，数の集合では，a^{-1} を $\frac{1}{a}$ と書くので，$\sin^{-1} x$ と混同しやすい．

- $\sin(\sin^{-1} x)$

  1. サイン，アークサイン x
  2. アークサイン x のサイン
  3. x の逆正弦の正弦
  4. sine function with variable $\sin^{-1} x$.

A.5　指数関数

- $\sqrt{a}$

  1. ルート a
  2. 平方根 a
  3. 2 乗根 a
  4. square root of a.

◇ **留意点**　「a の平方根は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$」であることに注意する．$\sqrt{a}$ については，$a \geq 0, \sqrt{a} \geq 0$ という根号の規約に注意すること．中学校では，数の平方根を扱っているので，文字になったときの上の規約を十分に理解させておくことが望ましい．一般に，$a \geq 0$ のとき $\sqrt{a^2} = a$ はわかりやすいが，$a<0$ のとき $\sqrt{a^2} = -a$ は理解しにくいところである．

♣ **参考**　バスカラ (Bhāskara,1150 頃, インド) は,「ka 15 ka $\dot{1}0$」で $\sqrt{15} - \sqrt{10}$ をあらわしている（ka は平方根，10 の上の · は減法を意味する）．インド人は当時ギリシア人よりもはるかにすぐれていたといわれ,「正の数の平方も，負の数の平方もともに正である．正の数の平方根は 2 つあって，1 つは正，1 つは負である．負の数の平方根は存在しない．なぜなら，負の数は平方根でないから」とバスカラは述べている．

- a^x

  1. a の x 乗
  2. a を底とする x の指数関数
  3. a to the x-th power.

♡ **注意**　a を底とする x の指数関数というのは，a^x の意味を述べたものである (exponential function of x with the base a)．ほとんど上の読み方が用いられる．

- $\sqrt[n]{a}$

  1. n 乗根 a

2. a の n 乗根

3. the n-th root of a.

- $(\sqrt[n]{a})^m$

1. n 乗根 a の m 乗

2. a の n 乗根の m 乗

3. the n-th root of a and then to the m-th power.

- $\sqrt[n]{a^m}$

1. n 乗根, a の m 乗

2. a の m 乗の n 乗根

3. the n-th root of a to the m-th power.

- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

1. m 乗根, n 乗根 a

2. n 乗根 a の m 乗根

3. the m-th root over the n-th root of a.

- $\sqrt[mn]{a}$

1. mn 乗根 a

2. a の mn 乗根

3. the mn-th root of a.

- $\sqrt[mp]{a^{np}}$

1. mp 乗根, a の np 乗

2. a の np 乗の mp 乗根

3. the mp-th root of a to the np-th power.

♣ **参考**　1400 年代の後半に死んだといわれるアラビア人のアル・カラサディの書いた本の中には，平方根をあらわすのに $>.$ のような記号を用いて，例えば $\sqrt{48}$ は

$\frac{>.}{48}$ のように書かれている．$>.$ は平方根を意味する (dschidr) の頭文字をくずしたものといわれる．

記号 $\surd$ は，ルドルフ (C.Rudolf) やシュティフェル (M.Stifel,1486?〜1567) によってはじめて用いられた．

♡ **注意**　上に示したのはすべて読み方である．n が偶数のとき，正の数 a の n 乗根のうち実数のものは正，負 2 つあって絶対値が等しい．その正の方を $\sqrt[n]{a}$ で，負の方は $-\sqrt[n]{a}$ であらわすからといって「a の n 乗根」という読み方が正しくないというのではない．この点さえ注意すれば，上のどちらの読み方でも良い．

- p^m
  1. p の m 乗
  2. p to the m-th power.
- $(p^m)^n$
  1. p の m 乗の n 乗
  2. (かっこ)，p の m 乗，かっこの n 乗
  3. p to the m-th power to the n-th power.
- p^{mn}
  1. p の mn 乗
  2. p to the mn-th power.
- $(pq)^n$
  1. p, q の n 乗
  2. p，かける，q の n 乗
  3. (かっこ)，p，かける，q，かっこの n 乗
  4. pq to the n-th power.
- $p^n q^n$
  1. p の n 乗，q の n 乗

2. p の n 乗，かける，q の n 乗

3. the product p to the n-th power and q to the n-th power.

- $(\frac{p}{q})^n$

1. p，わる，q の n 乗

2. q 分の p の n 乗

3. (かっこ)，p，わる，q，かっこの n 乗

4. (かっこ)，q 分の p，かっこの n 乗

5. the quotient $\frac{p}{q}$ to the n-th power.

- $\frac{p^n}{q^n}$

1. p の n 乗，わる，q の n 乗

2. q の n 乗分の p の n 乗

3. the ratio of p to the n-th power to q to the n-th power.

◇ **留意点**　中学校では，2 乗 (平方)，3 乗，累乗，指数などについて学習しているが，累乗についての計算を指数法則としてはまとめていない．したがって，今までと違って

$$p^m \times p^n = p^{m+n}, (p^m)^n = p^{mn}, (pq)^n = p^n q^n, \left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}(q \neq 0)$$

という指数法則は，初めて学習することになる．始めは，m，n が自然数のときについて扱い，その後，負の指数，0 の指数，分数指数と指数を拡張することになる．

A.6　対数関数

- $\log_a x$

1. ロッグ，a，x

2. a を底とする x の対数

3. a を底とする x の対数関数
4. ロガリズム　a, x
5. log of x to the base a.
6. logarithmic function of x with the base a.

◇ **留意点**　最初の学習では，生徒は $\log_a x$ が何を表すかという意味がつかみにくいものである．$\log_a x$ が「a を底とする x の対数」であることを記憶したとしても，それだけでは意味が十分に理解されたとはいえない．$\log_2 8, \log_3 81$ のような具体例によって，$2^3 = 8, 3^4 = 81$ とよく比較させて理解の徹底をはかると同時に，下のような関係図がいつでも頭の中に浮かべられるようにしたいものである．

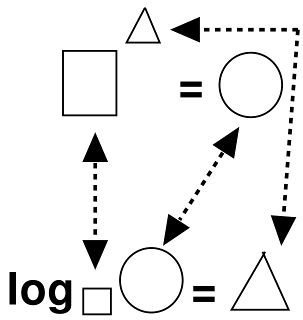


図 A.1: 対数関数と指数関数

♣ **参考**　対数の発見は，ネーピア（J. Napier,1550〜1617）が1614年に著わした「Mirifici logarithmorum canonis descriptio」(おどろくべき対数規則の記述) という書物によるものである．英語の logarithm という言葉は，ギリシア語の $\lambda o \tau o \varsigma$(比) と $\alpha \rho \iota \theta \mu o \varsigma$(数) から生まれたといわれる．ネーピアは，三角法の計算を簡単にする目的で研究に取り組み，対数を発見したが，これは2つの直線上の点の運動を対比した力学的な考えからでたもので，今日の常用対数でも，自然対数でもない．

常用対数を初めて考えたのは，ネーピアの弟子のブリッグス (H.Briggs,1556?〜1630?) であり，自然対数を初めて用いたのは，オートレッド (W.Oughtred,1574〜1660) である．

- $\log N$

1. ロッグ N

2. ロガリズム　N
3. 常用対数 N
4. log of N.
5. common log of N.

◇ **留意点**　10 を底とする対数ー常用対数では，底の 10 を略して $\log N$ のように書き表すが，これはあくまで簡略の記法である．常用対数による計算を扱わなければ，つねに $\log_{10} N$ と底を記入したほうが良いかもわからない．

数学 I では，自然対数 (natural logarithm)$\log_e x$ を学習するが，微積分では，この底を略して一般に $\log x$ と書く慣習がある．あるいは，自然対数に限り $\ln x$ と書いて一般の対数と区別することもある．

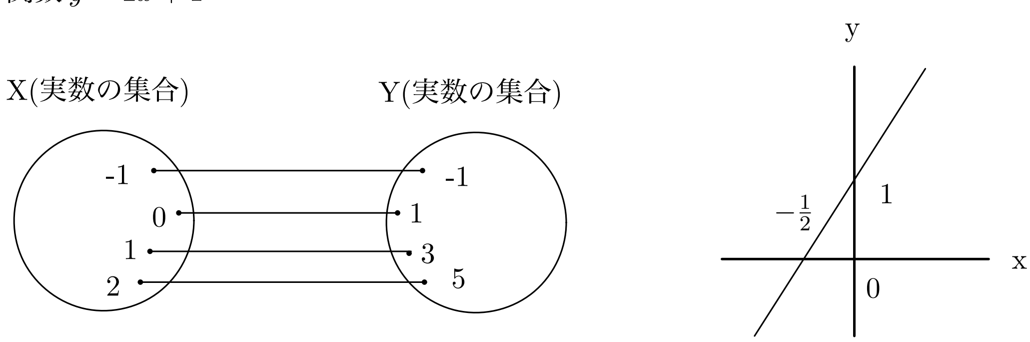
A.7　数列

- a_n

1. a, n
2. 数列の第 n 項 a, n
3. 数列の一般項 a, n
4. general term a_n

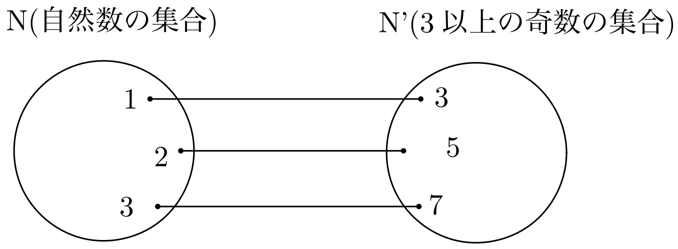
◇**留意点**　数列の一般項 a_n は，必ずしも n の式で表されるとは限らない．n の式で表す場合には，数列の規則を見つける事が基本である．数列は，いわば自然数を定義域とする関数であることを，次のように まとめておきたい．

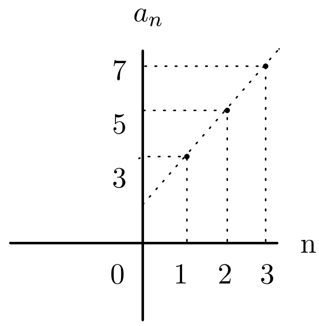
– 関数 $y = 2x + 1$



.

– 数列 $a_n = 2n + 1$





- $\sum_{k=1}^{n} a_k$

  1. シグマ $a, k, k = 1$ から n まで
  2. k が 1 から n までの a, k の値の和
  3. シグマ，k が 1 から n まで，a, k
  4. the sum from k equals l to n of a sub k

◇**留意点** 一般に，添字（suffix) は異なっていても，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ と $\sum_{l=1}^{n} a_l$ は同じものを表している．また，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ の代わりに $\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$ と書いても良い．

A.8 微分・積分

♣**参考** Σ は，S に相当するギリシア文字で (小文字は Σ), 和（SUM) を表す．Σ の事を総和記号とも言う．

- $n \to \infty$

  1. n は限りなく大きくなる
  2. n 無限大
  3. n 矢じるし無限大
  4. n goes to infinity

◇**留意点** 無限大の記号 ∞ を，比例の記号 $\propto$，相似の記号と混同しないようにする．

♣ **参考** 無限大の記号 ∞ をはじめて用いたのは，ウォリス (J.Wallis,1616-1703) で，1655 年に著わした無限算術 (Arithmetica infinitorum) においてである．しかし，この著書で彼は

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3} < \cdots$$

を導き，$\frac{1}{0} = \infty$，すなわち，無限大より負の数が大きいと結論するような誤りを犯している．

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

1. n が限りなく大きくなると，a_n は限りなく α に近づく
2. n が限りなく大きくなるときの a_n の極限値は α
3. n が限りなく大きくなるとき,a_n は α に収束する
4. リミット，n，無限大，a，n，イコール α
5. a_n converges to α as n goes to infinity

◇**留意点** $n \to \infty$,$a_n \to +\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ などを表す内容を理解させることが大切である．とくに，∞(無限大) は，非常に大きなある数を表しているのではなく，限りなく大きくなっていく状態を表していることに留意させる．

数列の場合，n は項の数を表わすから必ず自然数である．したがって，数列には $n \to -\infty$ は考えられず，つねに $n \to +\infty$ を考えるから $+$ を省略して $n \to \infty$ と書くこと，および，$n \to \infty$ というのは，n が $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ と自然数をとりながら限りなく大きくなることを明らかにしておくことが必要である．ここが，関数の極限を考える場合と比べて大きな違いである．また，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と，記号 $=$ を用いるが，これは左右両辺が全く等しいことを表わす記号というよりは，左右両辺が限りなく近づくことを表わす意味で，$a_n = \alpha$ とは異なった概念であることに注意させたい．

♡ **注意** lim は，極限を意味する limes(limit) を略記したものである．

- $0.a$

1. $0.a$ ドット

2. 0 point a recurring

- $[\quad x\quad]$

1. ガウス記号 x
2. 実数 x を超えない最大の整数
3. gaussian step function x

◇**留意点** $n \leq x < n+1$(n は整数) ならば，$[\quad x\quad] = n$ である．すなわち，$[\quad x\quad]$ は実数 x 以下の最大の整数を意味する．数直線を利用して考えさせると良い．なお，閉区間を表わすときにも $[\qquad]$ が用いられるが，この場合には，かっこ内に２つの実数が入っているから，ガウス記号との見分けはつくはずである．

- $g\{f(x)\}$

1. $g, f(x)$
2. $f(x)$ の関数 g
3. x の関数 $f(x)$ を変数とする関数 g
4. function g with variable function $f(x)$

- $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$

1. x が右から a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限
2. x，矢じるし，a のときの右の極限
3. x が a より大きい値をとりながら a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限
4. the limit of $f(x)$ as x goes to positive a

- $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$

1. x が左から a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限
2. x，矢じるし，a のときの左の極限
3. x が a より小さい値をとりながら a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限
4. the limit of $f(x)$ as x goes to negative a

♡ **注意** $a=0$ のときは $x \to 0+0$，$x \to 0-0$ を $x \to +0$，$x \to -0$ と書く．

◇**留意点** $x \to a$ は，$x > a$ で $|x-a|$ が限りなく小さくなる場合，$x < a$ で $|x-a|$ が限りなく小さくなる場合の両方を表わしている．したがって，この両方の場合を区別する必要があるときに，$x \to a+0$，$x \to a-0$ と書くのである．

この書き方を用いると

$\lim_{x \to a+0} f(x) = b$ かつ $\lim_{x \to a-0} f(x) = b$ のとき $\lim_{x \to a} f(x) = b$

である．

- $\lim_{x \to a} f(x) = b$

1. x が限りなく a に近づくとき，$f(x)$ は限りなく b に近づく．
2. x が限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の極限値は b である．
3. x が限りなく a に近づくとき，$f(x)$ は b に収束する．
4. リミット，x 矢じるし a，$f(x)$, イコール b
5. the function of $f(x)$ converges to b as x goes to a

◇**留意点** 関数の極限では，一般に x，$f(x)$ は実数をとることから，$x \to a$ は，x がすべての実数値をとりながら連続的に a に近づくことを理解させることが大切である．したがって，数列の極限の場合と違って $n \to -\infty$ の場合もあることに留意させたい．

- $[a, b]$

1. 閉区間，a, b
2. a から b までの間の区間
3. a 以上，b 以下の区間
4. closed interval between a and b

- (a, b)

1. 開区間，a, b
2. a と b との間の区間

3. a より大きく，b より小さい区間
4. open interval between a and b

- $(a, b]$

1. a より大きく b 以下の区間
2. a を超え，b 以下の区間
3. half-open interval between a and b,closed on right

- $[a, b)$

1. a 以上 b より小さい区間
2. a を以上，b 未満の区間
3. half-open interval between a and b,closed on left

◇**留意点** これらの区間は，集合の記号 (不等式) を用いてそれぞれのように表わされることを理解させる．

$[a, b] \ldots x|a \leq x \leq b$

$(a, b) \ldots x|a < x < b$

$(a, b] \ldots x|a < x \leq b$

$[a, b) \ldots x|a \leq x < b$

- $f'(a)$

1. f ダッシュa
2. $x = a$ における関数 $f(x)$ の微分係数 (変化率)
3. the first derivative of $f(x)$ at $x = a$

◇**留意点** 関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数 (変化率)$f'(a)$ は，$y = f(x)$ における a から $a + \Delta x$ までの平均変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の $\Delta x \to 0$ のときの極限値であり，これは関数 $y = f(x)$ のグラフ上の X 座標が a に対応する点で，このグラフにひいた接線の傾きである．また，ある時刻 t における位置が $s = f(t)$ で表わされる運動において，時刻 t_1 における速度も $f'(t_1)$ というように同じ形で表わされることに注意させたい．

- y'

  1. y ダッシュ
  2. y の第 1 次導関数
  3. 導関数 y ダッシュ
  4. the first derivative of y

- $f'(x)$

  1. f ダッシュx
  2. $f(x)$ の第 1 次導関数
  3. 導関数 f ダッシュx
  4. the first derivative of the function of $f(x)$ by x

- $\frac{dy}{dx}$

  1. dy, dx
  2. y の第 1 次導関数
  3. 導関数 dy, dx
  4. dy over dx

  ♡ **注意** これは「dx 分の dy」とは読まない.

- $\frac{d}{dx}f(x)$

  1. $d, dx, f(x)$
  2. $f(x)$ の第 1 次導関数
  3. 導関数 $d, dx, f(x)$
  4. derivative of the function of $f(x)$ by x

- $\int f(x)dx$

  1. インテグラル, $f(x), dx$
  2. 不定積分 $f(x)$

3. $f(x)$ の不定積分

4. integral of $f(x)$ by x

♡ **注意** $\int$ はラテン語 Summa(和)｛英 Sum｝の頭文字 S の古い形である．

◇**留意点** $\int f(x)dx$ は，つねに $\int$ と dx が対をなしているから，$\int 5x$ とか，$5xdx$ というような間違った書き方をしないように注意する．

微分と積分は逆演算の関係にあるから，とくに初歩の段階では

$(2x)' = 4x \leftarrow \ldots \rightarrow \int 4xdx = 2x^2 + C$

の対応関係を具体例によって十分理解させておく必要がある．

不定積分を求めたときに，積分定数を書かなければならない理由もしっかりわからせておかなければならない．次のような間違った計算をする生徒がよく見受けられる．

$\int 3x^2dx = \int 3 \cdot \frac{x^2}{3}dx = \int x^3dx + C$ ($\int, dx$ をいつまでも書いている．

$\int 3x^2dx = 3 \cdot \frac{x^2}{3}dx + C = x^3 + C$ ($\int, dx$ をばらばらにしている．)

$\int \boxed{} dx$ は不定積分を表わす記号であるから，不定積分が求められればもはや不要であり，その代わりに積分定数が入ってくるという手順を徹底させたい．

- $[\int f(x)dx]_{x=a}$

1. $x = a$ に対応する $f(x)$ の不定積分の値

2. $x = a$ に対応するインテグラル，$f(x), dx$ の値

3. かっこ，インテグラル，$f(x), dx$,（かっこ）$x = a$

4. the integral of $f(x)$ by x at a

- $\int_a^b f(x)dx$

1. インテグラル，a から b まで，$f(x), dx$

2. $f(x)$ の a から b までの定積分

3. 定積分，a から b まで，$f(x), dx$

4. the integral of $f(x)$ over an interval between a and b

◇**留意点** 不定積分は一般に関数であるが，定積分は定数を表わすものであるという両者の違いを明らかにしておいておかないと，同じような $\int$ と $\int_a^b$ を用いるので，とかく混同しがちである．定積分の図形的意味が理解されれば，それを通して，不定積分と定積分の関連も把握されるものである．

- $[F(x)]_a^b$

1. $F(x)$,a,b
2. 関数 $F(x)$ の $x=b$ と $x=a$ の値の差
3. the value of primitive function over the interval between a and b

♣**参考** 微分法，積分法は，ニュートン (I.Newton,1642-1727) とライプニッツ (G.W.Leibniz,1646-1716) とによる．ニュートンは，1740 年に出版された曲線の求積について (De quadrature curvarum) の中で，運動または増加によって生ずる量を流動量 (fluent) と呼び，運動または増加の速度を流動率 (fluxion) と呼んでいる．これらを表わすのに，流動量には文字 z,x,v を，流動率には $\dot{z},\dot{y},\dot{x},\dot{v}$ を用いている．この $\dot{z},\dot{y},\dot{x},\dot{v}$ は，今日でいえば，$\dot{x}=\frac{dx}{dt},\dot{y}=\frac{dy}{dt},\ldots$ に相当する．
また，流動率が z,y,x,v となるような流動量を $\dot{z},\dot{y},\dot{x},\dot{v}$ と表わしているが，これは，今日の積分に相当する記号である．
一方，ライプニッツは，次の 2 つの論文
極大と極小のための新方法 (Nova methodus pro maximis et minis,1684)
幾何学秘儀および不可分量と無限との解析について
(De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum,1686)
の中に，微分積分学の考えを述べている．彼は曲線に接線をひく問題と，直線が与えられたときそれを接線とする曲線を見つける問題の関係を調べ，後者は前者の逆であるという幾何学的発想から，微分の考えを差 (differentia) という表現で用い，dx,dv といった記号を使っている．また，後者の論文の中に，接線法 (微分) の逆として積分を発表し，$\int$ という記号を用いている．

- y''

1. y ツウダッシュ

2. y の第 2 次導関数
3. the second derivative of y

- $f''(x)$

1. f ツウダッシュ　x
2. $f(x)$ の第 2 次導関数
3. the second derivative of the function of $f(x)$

- $y^{(n)}$

1. y の第 n 次導関数
2. y の n 回微分
3. the n-th derivative of y

- $\frac{d^n y}{dx^n}$

1. d,n,y,d,x,n
2. d,n 乗，y,d,x,n 乗
3. y の第 n 次導関数
4. y の n 回微分
5. the n-th derivative of y with respect to x

- $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$

1. d,n,d,x,n,$f(x)$
2. d,n 乗，d,x,n 乗,$f(x)$
3. $f(x)$ の第 n 次導関数
4. $f(x)$ の n 回微分
5. the n-th derivative of the function of $f(x)$ with respect to x

- $\int f(\sin x) \cos x dx$

1. インテグラル，$f(\sin x)$, 掛ける，$\cos x$,dx

2. $\sin x$ を変数とする関数 $f(x)$，掛ける，$\cos x$ の不定積分
3. the indefinite integral of f with variable $\sin x$ times $\cos x$ with respect to x

- $\int f\{g(t)\}g'(t)dt$
  1. インテグラル，f,$g(t)$,$g'(t)$,dt
  2. t の関数 $g(t)$ を変数とする関数 $f(t)$, 掛ける，$g'(t)$ の不定積分
  3. the indefinite integral of f with variable $g(t)$ times $g'(t)$ with respect to t

A.9　複素平面

- $|\, z \,|$
  1. 複素数 z の絶対値
  2. 絶対値 z
  3. the absolute value of complex number z
- θ
  1. 偏角 θ
  2. 複素数の偏角 θ
  3. amplitude θ

♣ **参考**　複素数 z の偏角 θ は amp z (amplitude の略), arg z (argument の略), あるいは $\angle z$ のように表すこともある.

A.10　確率・統計・組み合わせ

- $n!$
  1. n，階乗
  2. n の階乗
  3. 階乗，n

4. n factorial

◇ **留意点** $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ などはわかりやすいが $(n-1)! = (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1, (n+2)! = (n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$ なども，すぐに書き表すことができるようにしたい．$0! = 1$ は $a^0 = 1$ と同様に一つの規約であることに注意する．

◇ **参考** $n!$ は $\underline{n}$ のようにもの表すことがあるが，最近はあまり用いられない．階乗は英語で factorial というので，$n!$ を [n, ファクトリアル] などと読むこともある．

- ${}_nC_r$

1. n, C, r
2. C の n, r
3. n, コンビネーション,r
4. combinations of n

◇ **留意点** 組合せと組合せの数の違いを明らかにしておくこと．${}_nC_r$ は組合せの数を表す記号である．この場合も $n \geq r$ である．

◇ **注意** ${}_nC_r$ を $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ のように表すこともある．この表し方は，２項定理の展開式の係数に用いられることが多い．

◇ **参考** 組合せの理論は古く，インド人，アラビア人もその特別な場合を取り扱っていたといわれる．はじめての系統的研究は，ジャック・ベルヌーイ（Jacques Bernoull, 1654-1705) によってなされたようである．

- ${}_nP_r$

1. n, P, r
2. P の n, r
3. n, パーミュテーション,r
4. permutations of n things taken r at a time

- ${}_nC_r a^{n-r} b^r$

1. n, C, r, a の $n-r$ 乗，b の r 乗
2. the r-th term of the expanation of $(a+b)^n$

◇ **留意点** これは，$(a+b)^n$ を展開したときの一般項，すなわち第 $(r+1)$ 番目の項を表す．この場合，$n \geq r \geq 0$ に注意する．

◇ **参考** $(a+b+c)^n$ の一般項は

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^p b^q c^r$$

である．ただし，$p+q+r=n, p, q, r$ は，0 または正の整数である．

- $p(A)$
  1. p, A
  2. 事象 A の起こる確率
  3. 事象 A の確率
  4. probability of an event A
- $\bar{A}$
  1. A の余事象
  2. 余事象 A
  3. complement of an event A
- $p(\bar{A})$
  1. A の余事象の確率
  2. 余事象 A の確率
  3. probability of complement of an event A
- $p(A)+p(B)$
  1. $p, A,$ プラス,p, B
  2. 事象 A の確率と事象 B の確率の和
  3. sum of the probability of an event A and the probability of an event B

- $p(A) \cdot p(B)$

  1. p, A, p, B
  2. 事象 A の確率と事象 B の確率の積
  3. 事象 A, B がともに起こる確率
  4. product of the probability of an event A and the probability of an event B

- $p(A) \cdot p_A(B)$

  1. p, A, p, A, B
  2. 事象 A の確率と，A が起こったとき B の起こる確率の積
  3. 事象 A, B がこの順にひきつづいて起こる確率
  4. product of the probability of an event A and the probability of an event B assuming an event A

◇ **留意点** 余事象，排反事象，従属事象，などの事象と，それらの事象の起こる確率を明確に区別して理解することが大切である．

- ${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$

  1. n, C, r, p の r 乗，$1-p$ の $n-r$ 乗
  2. n 回の独立試行において r 回起こる確率
  3. binomial distribution involving parameters n and p

◇ **参考** 確率の研究については，パチオリ (Luca Pacioli, 約 1445-1514)，フェルマ (P.de Ferma)，パスカル (B.Pascal,1623-1662)，ジャック・ベルヌーイ (J.Bernoulli,1654-1705)，ド・モアブル (A.de Moivre,1667-1754) などの名前があげられるが，いわゆる古典確率論が数学として体系づけられはじめたのは，1654 年にフランスの賭博師がパスカルに提出した問題にはじまるといえよう．その問題は,「技術が互角の二人が勝負をして，一方が k 回勝つまでは続けて勝敗を決することになっている．もしも最後まで続けずに途中でやめたならば，賭博の公平な配分法はどのようなものか」というものである．この問題をうけたパスカルは，フェルマと

の手紙のやりとりの中で確率について論じ，これが，その後のラプラス (P.S.M. de Laplace,1749-1827) によって，古典確率論としてまとめられたのである．
ラプラスは 1812 年に,「確率の解析的理論」(théorie analytique des probabiltés) という大著を刊行した．この書物の始めに，ラプラスは,「事象の確率とは，全ての起こり得る場合の数に対する都合のよい (favorable) 場合の数の比であって，このとき，全ての場合が，我々にとって等しく起こり得て (également possible), いずれの場合も他の場合より一層起こらねばならぬなどとは思われないものとする．いろいろな場合のこの正確な評価は，偶然の解析の最も微妙な (délicat) 点の一つである.」と述べている．これがいわゆる確率のラプラスによる定義である．この著書には，確率の加法定理，乗法定理，大数の法則など，現在の初等確率論における内容がすべて含まれている．確率論は，その後各国の学者によって研究され，中でも，チェビシェフ (P.L.Chebyshev,1821-1894)，ボレル (E.Borel,1871-1956)，マルコフ (A.A.Markov,1856-1922) などによって発展し，ケインズ (J.M.Keynes,1883-1946)，ミーゼス (R.von Mises,1883-1953) の優れた研究を得たが，コルモゴロフ (A.N.Kolmogorov,1903-) による確率論の公理論的な研究成果によって，現代の確率論が完成されたといえるものである．

- $\bar{x}$

  1. x, バー
  2. バー，x
  3. x の平均値
  4. mean value of random variable x

- $\tilde{\mathrm{x}}$

  1. 標本平均 $\bar{x}$ の平均値
  2. $\bar{x}$ の平均値
  3. mean value of sample mean

- $\sigma_{\bar{x}}$

  1. $\sigma, x,$ バー

2. 標本平均 $\bar{x}$ の標準偏差

3. $\bar{x}$ の標準偏差

4. standard deviation of sample mean

◇ **参考** 統計についてはいろいろな用いられるから，それらを混同しないように注意しなければばならない．

- M　N 個の資料の平均値
- $\bar{x}$　度数分布の平均値，２項分布の平均値，標準平均
- c　階級の幅
- x_0　仮の平均
- M_e　メジアン，中央値
- M_o　モード，並み数
- σ　標準偏差，２項分布の標準偏差
- σ^2　分散
- N　母集団の大きさ
- n　標本の大きさ
- $\tilde{x}$　標本平均 $\bar{x}$ の平均値
- m　母集団の平均値
- $\sigma_{\bar{x}}$　標本平均の標準偏差
- S　標本の標準偏差

• E(x)

1. E, カッコ,X,（カッコ）
2. E,X
3. 変量 X の期待値
4. expectation E(X)

• E(x)

1. E,x

2. 確率変数 x の平均値（期待値）

3. mean value of a random variable x

- V(x)

1. V,x

2. 確率変数 x の分散

3. variance of a random variable x

A.11　ギリシア文字

大文字	小文字	名称	読み方
A	α	alpha	アルファ
B	β	beta	ベータ，ビータ
Γ	γ	gamma	ガンマ
Δ	δ	delta	デルタ
E	ϵ	epsilon	イプシロン，エプシロン，エプサイロン
Z	ζ	dzeta	ゼータ，ツェータ，ジータ
H	η	eta	イータ，エータ
Θ	θ	theta	シータ，テータ
I	ι	iota	イオタ
K	κ	kappa	カッパ
Λ	λ	lambda	ラムダ
M	μ	mu	ミュー
N	ν	nu	ニュー
Ξ	ξ	xi	グザイ，クシイ，クサイ
O	o	omicron	オミクロン，オマイクロン
Π	π	pi	パイ，ピー
Σ	σ	sigma	シグマ，ジグマ，ジヒマ
T	τ	tau	タウ，トオ
Υ	υ	ypsilon	ウプシロン，ユプシロン，ウプサイロン
Φ	ϕ	phi	ファイ，フィー
X	χ	khi	カイ，ヒー，キー
Ψ	ψ	psi	プサイ，プシー，サイ
Ω	ω	omega	オメガ

技術教育研究⊠

（工学基礎解析・力学）

basis.pdf and basis1.pdf (Ver. 1.01)

http://web.ed.niigata-u.ac.jp/~suzuki/text/