高等学校数学

解答はすべて解答用紙に書きなさい。

［1］ 次の(1)～(4)の問いに答えなさい。

(1) △ＡＢＣの内部に，$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$を満たす点Ｐがある。ＡＰの延長と辺ＢＣとの交点をＤとし，△ＢＰＤの面積をS_1，△ＡＢＣの面積をS_2とする。このとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$の値を求めよ。

(2) 各項が正の数列$\{a_n\}$の，初項から第n項までの和S_nが

$$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

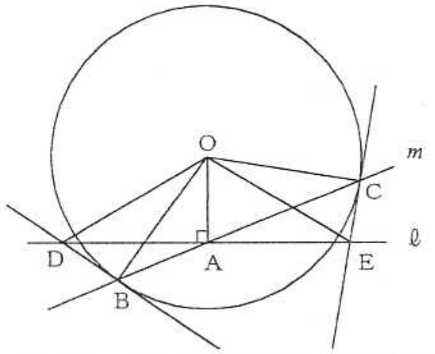
で表されるとき，一般項a_nをnの式で表せ。

(3) ４人でじゃんけんをするとき，次の①，②の問いに答えよ。

① １回だけじゃんけんをするとき，あいこになる確率を求めよ。

② ２回目のじゃんけんで，初めて１人の勝者が決まる確率を求めよ。ただし，１回目の敗者は２回目のじゃんけんに参加しないものとする。

(4) 下の図のように，円Ｏと２点で交わる直線ℓがあり，中心Ｏからℓに下ろした垂線の足をＡとし，点Ａを通る直線でℓと異なるものをmとする。直線mと円Ｏとの交点をＢ，Ｃとし，点Ｂにおける接線と直線ℓとの交点をＤ，点Ｃにおける接線と直線ℓとの交点をＥとする。このとき，次の①，②の問いに答えよ。

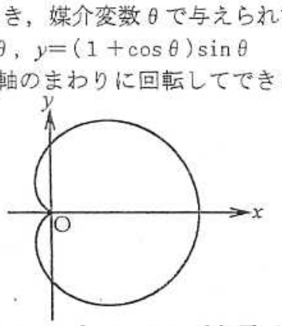


① ∠ＯＤＡ＝∠ＯＢＡであることを証明せよ。

② ＯＤ＝ＯＥであることを証明せよ。

［2］ 次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$のとき，媒介変数$\theta$で与えられた曲線
$x=(1+\cos\theta)\cos\theta$，$y=(1+\cos\theta)\sin\theta$
で囲まれる部分をx軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。



(2) ２つの放物柱面$z=1-x^2$，$x=1-y^2$と平面$z=0$によって囲まれる立体の$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$の部分の体積を求めよ。

［3］ ３次方程式$x^3-3x+3=0$について，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(1) 実数解はただ１つであることを証明せよ。

(2) (1)の実数解をα，残りの２つの虚数解をβ，γとするとき，$|\alpha|$，$|\beta|$，$|\gamma|$の整数部分をそれぞれ求めよ。

［4］ 集合Ｘに距離dを与えた距離空間$(X,\ d)$において，Ｘの点xのε開球を，$U(x,\ \varepsilon)=\{y\in X \mid d(x,\ y)<\varepsilon\}$と表す。Ｘの部分集合Ａが，「Ａの任意の点$a$に対して，$a$の$\varepsilon$開球$U(a,\ \varepsilon)$をとり，$U(a,\ \varepsilon)\subset A$とできる」とき，ＡをＸの開集合であると定義する。このとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) 有限個のＸの開集合A_1，A_2，…，A_nの共通部分$\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}A_k$はＸの開集合であることを証明せよ。ただし，$n$は自然数とし，$\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}A_k$は空集合でないものとする。

(2) 可算個のＸの開集合A_1，A_2，…の共通部分$\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$は開集合にならない場合があることを，例をあげて説明せよ。

(3) Ｘの部分集合Ｆの補集合が開集合であるとき，ＦをＸの閉集合と定義する。このとき，Ｘの可算個の閉集合F_1，F_2，…の共通部分$\displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$は閉集合であることを証明せよ。

［5］ 次の(1)～(3)の問いに答えなさい。ただし，$\mathbf{R}$を実数全体の集合とする。

(1) ３次元ベクトル空間$\mathbf{R}^3$の一次独立な２つのベクトル$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$によって決定される平面の方程式は，$\begin{vmatrix}x & x_1 & x_2\\ y & y_1 & y_2\\ z & z_1 & z_2\end{vmatrix}=0$で表されることを証明せよ。

(2) ２次元ベクトル空間$\mathbf{R}^2$から３次元ベクトル空間$\mathbf{R}^3$への線形写像fが，

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$$

を満たすとき，$\mathbf{R}^2$の基本ベクトルの像$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$及び$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$を求めよ。

(3) (2)のfによって，$\mathbf{R}^2$全体は，$\mathbf{R}^3$のどのような部分に移されるか求めよ。