受検番号		氏 名	

中学校数学解答用紙（解答例）

その3

[6]

（1）　[求め方]

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ に対して

$n=1$を代入し，$a_1=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\dfrac{1}{a_1}\right)$　$a_1>0$より，$a_1=1$

$n=2$を代入し，$1+a_2=\dfrac{1}{2}\left(a_2+\dfrac{1}{a_2}\right)$

$a_2^2+2a_2-1=0$

$a_2>0$より，$a_2=\sqrt{2}-1$

答　$a_1=1$　，　$a_2=\sqrt{2}-1$

（2）　[求め方]

（1）より，$a_1=1$，$a_2=\sqrt{2}-1$

同様にして，$a_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ である。

以上のことから，

$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$　・・・①と推定できる。

数学的帰納法を用いて，①がすべての自然数で成立することを証明する。

$n=1$のとき，$a_1=\sqrt{1}-\sqrt{1-1}=1$より ①は成り立つ。

$a_k=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ と仮定すると，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)-\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}+\frac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)-\sqrt{k}$$

よって，$a_{k+1}^2+2\sqrt{k}\,a_{k+1}-1=0$

$a_{k+1}>0$より，$a_{k+1}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ となり，

$n=k+1$のときも①は成り立つ。

以上から，すべての自然数について①は成り立つ。

答　$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

（3）　[求め方]

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=0$$

答　0

[7]

（1）

求める平面の上にある点をP $(x,\ y,\ z)$ とすると，

$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$を満たす実数$\alpha$，$\beta$が存在する。

このとき，連立方程式

$$\begin{cases}x=\alpha x_1+\beta x_2\\ y=\alpha y_1+\beta y_2\\ z=\alpha z_1+\beta z_2\end{cases}\ \text{すなわち}\ \begin{pmatrix}x&x_1&x_2\\y&y_1&y_2\\z&z_1&z_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\alpha\\-\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

が成り立つ。

ここで，

$\begin{pmatrix}1\\-\alpha\\-\beta\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$より

$\begin{vmatrix}x&x_1&x_2\\y&y_1&y_2\\z&z_1&z_2\end{vmatrix}=0$ を満たす。

逆に，$\begin{vmatrix}x&x_1&x_2\\y&y_1&y_2\\z&z_1&z_2\end{vmatrix}=0$ ならば，3つのベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ は一次従属であり，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$は一次独立であるから，$\overrightarrow{OP}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$の線形結合で表される。よって，点Pは $\overrightarrow{OA}$ と$\overrightarrow{OB}$ で決定される平面上にある。

（2）　[求め方]

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\dfrac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$と表せる。

fは線形写像なので

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=-2f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)=-2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{3}{2}f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)-\frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

答　$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

（3）　[求め方]

R^2上の任意の点は $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$と表せる。(2)より，

$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=xf\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+yf\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=x\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$であり，

x，yを実数全体で動かすと，R^2全体は一次独立な２つのベクトル$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$で決定される平面に移される。

その平面の方程式は，$\begin{vmatrix}x&2&-1\\y&-1&1\\z&0&1\end{vmatrix}=0$

すなわち　$x+2y-z=0$　である。

答　平面　$x+2y-z=0$