受検番号		氏名	

高等学校数学解答用紙　（解答例）

［４］

(1)〔証明〕

$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ の任意の点 x をとると，$x \in A_k$ ($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

各 A_k は開集合なので，定義から $U(x,\ \varepsilon_k) \subset A_k$ 満たす正数 ε_k が存在する。

ここで，$\varepsilon < \min\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \cdots,\ \varepsilon_n\}$ を満たす正数 ε をとると，$U(x,\ \varepsilon) \subset U(x,\ \varepsilon_k) \subset A_k$　($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) である。

したがって，$U(x,\ \varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ となり，$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ に含まれる x の ε 開球が存在するので，$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ は開集合である。

(2)〔説明〕

$X=\mathbb{R}$，$d(x,\ y)=|x-y|$ ($x,\ y \in \mathbb{R}$) とする。

このとき，A_n を開区間 $\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$ とすると，A_n は開集合である。

しかし，$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k=\{0\}$ となり，$U(0,\ \varepsilon) \subset \{0\}$ となる ε がとれないので，$\{0\}$ は開集合ではない。

(3)〔証明〕

$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k=F$ とおく。Fの補集合 F^c が開集合であることを示す。

F^c の任意の点 x について，$x \notin F$ であるから，$x \notin F_n$ となる n が存在する。

このとき，$x \in F_n^c$ であり，F_n^c は開集合であるので，$U(x,\ \varepsilon) \subset F_n^c$ を満たす x の ε 開球 $U(x,\ \varepsilon)$ が存在する。

この $U(x,\ \varepsilon)$ の各点は F_n に属さないことから，$U(x,\ \varepsilon)$ の各点は F に属さず，$U(x,\ \varepsilon) \subset F^c$ を満たす。

したがって，F^c の任意の点 x に対して，$U(x,\ \varepsilon) \subset F^c$ を満たす x の ε 開球 $U(x,\ \varepsilon)$ が存在するので，F^c は開集合であり，$F=\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ は閉集合である。

［５］

(1)〔証明〕

求める平面の上にある点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ を満たす実数 α，β が存在する。

このとき，連立方程式

$$\begin{cases} x=\alpha x_1+\beta x_2 \\ y=\alpha y_1+\beta y_2 \\ z=\alpha z_1+\beta z_2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

ここで，$\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix}=0$ を満たす。

逆に，$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ z & z_1 & z_2 \end{vmatrix}=0$ ならば，３つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ は一次従属であり，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は一次独立であるから，$\overrightarrow{OP}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の線形結合で表される。よって，点Pは $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で決定される平面上にある。

(2)〔求め方〕

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

と表せる。f は線形写像なので

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=-2f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)=-2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\frac{3}{2}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)-\frac{1}{2}f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)=\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

答　$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3)〔求め方〕

$\mathbb{R}^2$ 上の任意の点は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せる。

(2)より，$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=xf\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)+yf\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

であり，x，y を実数全体で動かすと，$\mathbb{R}^2$ 全体は一次独立な２つのベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で決定される平面に移される。

その平面の方程式は(1)より，

$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y & -1 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$ すなわち，$x+2y-z=0$ である。

答　平面　$x+2y-z=0$