受検番号		氏名	

高等学校数学解答用紙　（解答例）

その２

［２］

(1)〔求め方〕

曲線はx軸に関して対称なので，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で考えればよい。

$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta(1+2\cos\theta)$

$\frac{dx}{d\theta} = 0$ のとき，$\theta = 0,\ \frac{2\pi}{3},\ \pi$

$y = \begin{cases} y_1 & \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{2\pi}{3}\right) \\ y_2 & \left(\frac{2\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi\right) \end{cases}$ とおけば，

求める体積Vは

$V = \pi \int_{-\frac{1}{4}}^{2} {y_1}^2 dx - \pi \int_{-\frac{1}{4}}^{0} {y_2}^2 dx$

$= \pi \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} {y_1}^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta - \pi \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} {y_2}^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta$

$= -\pi \int_0^{\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta$

$= -\pi \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 \sin^2\theta \{-\sin\theta(1+2\cos\theta)\} d\theta$

$= \pi \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 (1-\cos^2\theta)(1+2\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$

ここで，$\cos\theta = t$ とおくと

$V = \pi \int_{-1}^{1} (1+t)^2(1-t^2)(1+2t)\,dt$

$= \pi \int_{-1}^{1} (1+4t+4t^2-2t^3-5t^4-2t^5)\,dt$

$= \frac{8\pi}{3}$

である。

答　$\frac{8\pi}{3}$

(2)〔求め方〕

領域DをD＝$\{(x,\ y) \mid 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x},\ 0 \leqq x \leqq 1\}$とする。

求める体積Vは，

$V = \iint_D z\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} (1-x^2)\,dy\right) dx$

$= \int_0^1 (1-x^2)\sqrt{1-x}\,dx$

ここで，$\sqrt{1-x} = t$ とおくと，$x = 1-t^2$

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

したがって，

$V = \int_1^0 \{1-(1-t^2)^2\} t(-2t)\,dt$

$= 2\int_0^1 (-t^6+2t^4)\,dt = \frac{18}{35}$

答　$\frac{18}{35}$

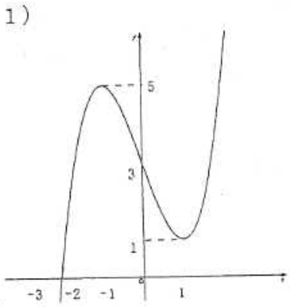
［３］

(1)〔証明〕

$f(x) = x^3 - 3x + 3$ とおくと，

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗



関数$y=f(x)$は$x=-1$で極小値5，$x=1$で極大値1をとる。

グラフより，x軸との交点は1つなので，与えられた方程式の実数解はただ1つである。

(2)〔求め方〕

(1)の $f(x)$ において，$f(-3)<0$，$f(-2)>0$が成り立つ。

したがって，$-3<\alpha<-2 \cdots$①

ゆえに，$|\alpha|$の整数部分は2である。

また，他の2つの虚数解をβ，γとおくと，解と係数の関係より，$\alpha\beta\gamma = -3$

したがって，$|\alpha\beta\gamma| = 3$

①より，$1 < |\beta\gamma| < \frac{3}{2}$ を得る。

βとγは互いに共役な複素数なので，$|\beta| = |\gamma|$である。

よって，$1 < |\beta| = |\gamma| < \frac{\sqrt{6}}{2}$となり，

$|\beta|$と$|\gamma|$の整数部分はともに1である。

答　$|\alpha|$の整数部分は2，$|\beta|$，$|\gamma|$の整数部分は1